

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ESSAI SUR LES NOTIONS
DE
STRUCTURE ET D'EXISTENCE
EN MATHÉMATIQUES

THÈSE PRINCIPALE POUR LE DOCTORAT ÈS LETTRES

PRÉSENTÉE

par **Albert LAUTMAN**

Ancien Elève de l'Ecole Normale Supérieure
Agrégré de Philosophie
Professeur au Lycée de Chartres

PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne

—
1937

THÈSE
POUR
LE DOCTORAT

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ESSAI SUR LES NOTIONS
DE
STRUCTURE ET D'EXISTENCE
EN MATHÉMATIQUES

THÈSE PRINCIPALE POUR LE DOCTORAT ÈS LETTRES

PRÉSENTÉE

par **Albert LAUTMAN**

Ancien Elève de l'Ecole Normale Supérieure
Agrégré de Philosophie
Professeur au Lycée de Chartres



PARIS
HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne

1937

La Faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les Thèses; ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.



A LA MÉMOIRE

DE

JACQUES HERBRAND



Digitized by the Internet Archive
in 2026



INTRODUCTION

De la nature du réel en mathématique.



CE livre est né du sentiment que dans le développement des mathématiques, s'affirme une réalité que la philosophie mathématique a pour fonction de reconnaître et de décrire.

Le spectacle de la plupart des théories modernes de philosophie mathématique est à cet égard extrêmement décevant. Le plus souvent, l'analyse des mathématiques ne révèle que très peu de chose et des choses très pauvres, comme la recherche de l'identité ou le caractère tautologique des propositions (1). Il est vrai que chez MEYERSON l'application de l'identité rationnelle au divers mathématique suppose un réel qui résiste à l'identification ; il semble qu'il y ait donc là l'indication que la nature de ce réel est différente du schéma trop simpliste avec lequel on essaie de le décrire ; par contre, le développe-

(1) Cf. ce passage de RUSSELL : « Elles (les propositions mathématiques) ont toutes la caractéristique qu'il y a un instant nous avons convenu d'appeler tautologie. Cela combiné avec le fait qu'elles peuvent être exprimées à l'aide de variables ou de constantes logiques, fournira la définition de la logique ou des mathématiques pures ». B. RUSSELL, *Introduction à la philosophie mathématique*. Trad. Moreau, p. 243.

ment de la notion de tautologie a complètement éliminé dans l'école de RUSSELL l'idée d'une réalité propre aux mathématiques.

Pour WITTGENSTEIN et CARNAP, les mathématiques ne sont plus qu'une langue indifférente au contenu qu'elle exprime. Seules les propositions empiriques se réfèreraient à une réalité objective, et les mathématiques ne seraient qu'un système de transformations formelles permettant de relier les unes aux autres les données de la physique. Si l'on essaie de comprendre les raisons de cet évanouissement progressif de la réalité mathématique, on peut être amené à conclure qu'il résulte de l'emploi de la méthode déductive. A vouloir construire toutes les notions mathématiques à partir d'un petit nombre de notions et de propositions logiques primitives, on perd de vue le caractère qualitatif et intégral des théories constituées. Or, ce que les mathématiques laissent espérer au philosophe, c'est une vérité qui se révélerait dans l'harmonie de leurs édifices, et en ce domaine comme en bien d'autres, la recherche des notions primitives doit céder la place à une étude synthétique de l'ensemble. Il nous paraît à cet égard bien étrange, qu'après avoir mené sur les théories relatives au nombre et à l'espace les enquêtes les plus complètes, M. POIRIER n'ait voulu voir dans les mathématiques qu'un jeu de symboles vides de sens (1). Il semble les avoir abordées avec l'intention de leur demander un enrichissement des indications que suggère du réel la perception extérieure ou le sens intime. Le réel est avant tout pour lui celui de l'expérience immédiate, et les théories abstraites ne nous donnent aucune prise sur lui. M. POIRIER reproche presque à ces théories leur trop grande perfection. L'aisance avec laquelle elles se correspondent donne à l'aspect de chacune d'elles un caractère arbitraire, possible par-

(1) Cf. René POIRIER, *Essais sur quelques caractères des notions d'espace et de temps*.

mi bien d'autres. Nulle part ne s'impose à l'esprit le sentiment d'une nécessité qui résulterait de la nature des choses, et l'on ne trouve jamais que des procédés formels, qui ne répondent pas à une « classification naturelle et intuitive » de leurs objets.

Nous croyons qu'il est possible d'arriver à des conclusions moins négatives, et la philosophie mathématique contemporaine s'est du reste engagée sur deux voies différentes, à une étude positive de la réalité mathématique. Cette réalité peut en effet être caractérisée par la façon dont elle se laisse appréhender et organiser ; elle peut l'être également de façon intrinsèque, du point de vue de sa structure propre. Nous allons essayer tout d'abord de résumer rapidement les idées fondamentales de l'une et de l'autre méthode.

Il n'y a pas de philosophe qui ait de nos jours plus que M. BRUNSCHVIG développé l'idée que l'objectivité des mathématiques était l'œuvre de l'intelligence, dans son effort pour triompher des résistances que lui oppose la matière sur laquelle elle travaille. Cette matière n'est pas facile ni uniforme ; elle a ses replis, ses arêtes, ses irrégularités et nos conceptions ne sont jamais qu'un arrangement provisoire qui permette à l'esprit d'aller plus avant. Les mathématiques se sont constituées comme la physique ; les faits à expliquer, ce furent tout au long de l'histoire les paradoxes que les progrès de la réflexion ont rendu intelligibles par un constant renouvellement du sens des notions essentielles. Les nombres irrationnels, l'infiniment petit, les fonctions continues sans dérivées, la transcendance de e et de π , le transfini ont été admis par une incompréhensible nécessité de fait avant qu'on en eût une théorie déductive. Ils ont eu le sort de ces constantes physiques comme c ou h qui s'imposaient de façon incompréhensible dans les domaines les plus différents, jusqu'à ce que le génie de MAXWELL, de PLANCK ou d'EINSTEIN ait su voir dans la constance

de leur valeur la liaison de l'électricité et de la lumière, de la lumière et de l'énergie. On comprend ainsi la défiance de M. BRUNSCHVIG vis-à-vis de toutes les tentatives qui voudraient déduire l'ensemble des mathématiques à partir d'un petit nombre de principes initiaux. M. BRUNSCHVIG s'est élevé, dans *Les Etapes de la philosophie mathématique*, aussi bien contre la réduction des mathématiques à la logique, que contre l'idée qu'il pourrait y avoir des principes généraux en mathématiques comme le principe de continuité de PONCELET ou le principe de permanence des lois formelles de HANKEL. Tout effort de déduction *a priori* tend pour lui à inverser l'ordre naturel de l'esprit dans la découverte mathématique. Il ne faudrait pourtant pas interpréter la philosophie mathématique de M. BRUNSCHVIG comme une pure psychologie de l'invention créatrice. « Entre les péripéties de l'invention », écrit-il, « qui n'intéressent qu'une conscience individuelle, et les formes du discours qui concernent surtout la tradition pédagogique, (la philosophie mathématique) délimitera le terrain où s'est produite l'acquisition collective du savoir, elle reconnaîtra la voie royale qu'y a tracée l'intelligence créatrice ». Entre la psychologie du mathématicien et la déduction logique, il doit donc y avoir place pour une caractérisation intrinsèque du réel. Il faut qu'il participe à la fois du mouvement de l'intelligence et de la rigueur logique, sans se confondre ni avec l'un ni avec l'autre, et ce sera notre tâche que d'essayer cette synthèse.

Le point de vue structural auquel nous devons ainsi également nous référer est celui de la métamathématique d'HILBERT. On sait la différence qui sépare la conception hilbertienne des mathématiques de celle des *Principia Mathematica* de RUSSELL et WHITEHEAD. HILBERT substitue

(1) L. BRUNSCHVIG, *Les Etapes de la philosophie mathématique*, p. 459.

à la méthode des définitions génétiques celle des définitions axiomatiques, et loin de vouloir reconstruire l'ensemble des mathématiques à partir de la logique, introduit au contraire, en passant de la logique à l'arithmétique et de l'arithmétique à l'analyse, de nouvelles variables et de nouveaux axiomes qui élargissent à chaque fois le domaine des conséquences. Voici par exemple, d'après M. BERNAYS (1) qui a publié dans l'édition des Œuvres complètes d'HILBERT une étude d'ensemble des travaux d'HILBERT sur les fondements des mathématiques, tout ce qu'il est nécessaire de se donner pour formaliser l'arithmétique : le calcul des propositions, les axiomes de l'égalité, les axiomes arithmétiques de la fonction du « suivant » ($a + 1$), les équations de récurrence pour l'addition et la multiplication et enfin une certaine forme de l'axiome de choix. Pour formaliser l'analyse il faut pouvoir appliquer l'axiome de choix, non seulement à des variables numériques, mais à une catégorie plus élevée de variables, celle où les variables sont des fonctions de nombres. Les mathématiques se présentent ainsi comme des synthèses successives où chaque étape est irréductible à l'étape antérieure. De plus, et ceci est capital, une théorie ainsi formalisée est incapable d'apporter avec elle la preuve de sa cohérence interne ; il faut lui superposer une métamathématique qui prend la mathématique formalisée comme objet et l'étudie du double point de vue de la non-contradiction et de l'achèvement (2). La dualité de plans qu'HILBERT établit ainsi entre la mathématique formalisée et l'étude métamathématique de ce formalisme a pour conséquence que les notions de non-contradiction et d'achèvement régissent un formalisme à l'intérieur duquel elles ne figurent pas comme des notions définies dans ce forma-

(1) Voir dans HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen*, t. III, p. 196, sqq. : Paul BERNAYS, *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik*.

(2) Cf. *infra*, chap. IV.

lisme. C'est pour exprimer ce rôle dominateur des notions métamathématiques par rapport à la mathématique formalisée qu'HILBERT écrit (1) : « Les axiomes et les propositions démontrables, c'est-à-dire les formules qui naissent du jeu de ces actions réciproques (à savoir la déduction formelle et l'adjonction de nouveaux axiomes), sont les images des pensées qui constituent les procédés ordinaires des mathématiques développées jusqu'ici, mais ne sont pas les vérités au sens absolu. Les vérités au sens absolu sont bien plutôt les vues (*Einsichten*) que donne ma théorie de la démonstration en ce qui concerne la résolubilité et la non-contradiction de ces systèmes de formules. » La théorie mathématique reçoit ainsi sa valeur des propriétés métamathématiques que sa structure incarne.

La conception structurale et la conception dynamique des mathématiques semblent de prime abord s'opposer : l'une tend en effet à considérer une théorie mathématique comme un tout achevé, indépendant du temps, l'autre au contraire ne la sépare pas des étapes temporelles de son élaboration ; pour la première, les théories sont comme des êtres qualitativement distincts les uns des autres, tandis que la seconde voit en chacune une puissance infinie d'expansion hors de ses limites et de liaison avec les autres, par quoi s'affirme l'unité de l'intelligence. Nous voudrions cependant, dans les pages qui vont suivre, essayer de développer une conception de la réalité mathématique où s'allient la fixité des notions logiques et le mouvement dont vivent les théories. Dans la métamathématique d'HILBERT, on se propose d'examiner les théories mathématiques du point de vue des notions logiques de non-contradiction et d'achèvement, mais ce n'est là qu'un idéal vers lequel s'orientent les recherches, et l'on sait à quel point cet idéal apparaît actuel-

(1) HILBERT, *Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann.*, Bd. 88, reproduit dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 180.

lement comme difficile à atteindre (1). La métamathématique peut ainsi envisager l'idée de certaines structures parfaites, réalisables éventuellement par des théories mathématiques effectives, et ceci indépendamment du fait de savoir s'il existe des théories jouissant des propriétés en question, mais on ne possède alors que l'énoncé d'un problème logique sans avoir aucunement les moyens mathématiques de le résoudre. Cette distinction entre la position d'un problème logique et sa solution mathématique a semblé parfois peu féconde, parce que ce qui importe ce n'est pas de savoir qu'une théorie pourrait être non-contradictoire, c'est de pouvoir décider effectivement si elle l'est ou si elle ne l'est pas. Il nous a paru cependant possible d'envisager d'autres notions logiques, susceptibles également d'être éventuellement reliées l'une à l'autre au sein d'une théorie mathématique et qui sont telles, que contrairement aux cas précédents, les solutions mathématiques des problèmes qu'elles posent puissent comporter une infinité de degrés. Des résultats partiels, des rapprochements arrêtés à mi-chemin, des essais qui ressemblent encore à des tâtonnements, s'organisent sous l'unité d'un même thème, et laissent apercevoir dans leur mouvement une liaison qui se dessine entre certaines idées abstraites, que nous proposons d'appeler dialectiques. Les mathématiques, et surtout les mathématiques modernes, algèbre, théorie des groupes, topologie (2), nous ont paru ainsi raconter, mêlée aux constructions auxquelles s'intéresse le mathématicien, une autre histoire plus cachée, et faite pour le philosophe. Une action dialectique se joue constamment à l'arrière-plan et

(1) Cf. J. CAVAILLÈS, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*.

(2) Nous exposons dans notre thèse complémentaire : *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, certains aspects qui nous paraissent distinguer les mathématiques modernes des mathématiques classiques.

c'est à la mettre en lumière que tendent nos six chapitres. Les trois premiers traitent plus spécialement des notions de structure mathématique. Nous étudions au chapitre I (Le local et le global) la solidarité presque organique qui pousse les parties à s'organiser en un tout et le tout à se réfléchir en elles ; nous examinons ensuite au chapitre II (Propriétés intrinsèques et propriétés induites) s'il est possible de ramener les relations qu'un être mathématique soutient avec le milieu ambiant, en propriétés d'inhérence caractéristiques de cet être. Nous montrons au chapitre III (La montée vers l'achèvement) comment la structure d'un être imparfait peut parfois préformer l'existence d'un être parfait en lequel toute imperfection a disparu. Puis viennent trois chapitres relatifs à la notion d'existence. Nous essayons de développer au chapitre IV (Essence et Existence) une théorie nouvelle des rapports de l'essence et de l'existence où l'on voit la structure d'un être s'interpréter en termes d'existence pour d'autres êtres que l'être dont on étudie la structure. Le chapitre V (Les Mixtes) décrit certains Mixtes intermédiaires entre des genres d'Êtres différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être ; notre dernier chapitre (Du caractère exceptionnel de l'existence) décrit enfin les procédés par lesquels un être peut être distingué au sein d'une infinité d'autres.

* * *

Nous voudrions montrer que les idées que nous inscrivons en tête de chacun de nos chapitres et qui nous paraissent dominer le mouvement de certaines théories mathématiques, pour être concevables indépendamment des mathématiques, ne sont pas néanmoins susceptibles d'une étude directe. Elles n'existent que par rapport à une matière qu'elles pénètrent d'intelligence, mais on peut dire

qu'en revanche ce sont elles qui confèrent aux mathématiques leur éminente valeur philosophique. La méthode que nous allons suivre est donc essentiellement une méthode d'analyse descriptive ; les théories mathématiques constituent pour nous un donné au sein duquel nous nous efforcerons de dégager la réalité idéale à laquelle cette matière participe.

PREMIÈRE PARTIE

LES SCHÉMAS DE STRUCTURE

CHAPITRE I

Le local et le global.

Un des traits caractéristiques du développement des mathématiques depuis le milieu du XIX^e siècle, c'est que les recherches mathématiques les plus différentes aient pu être poursuivies à un double point de vue, le point de vue local et le point de vue global. L'étude locale se porte vers l'élément, le plus souvent infinitésimal, de la réalité ; elle cherche à le déterminer dans sa spécificité, puis cheminant de proche en proche, établit progressivement des liaisons assez solides entre les différentes parties ainsi reconnues, pour qu'une idée d'ensemble se dégage de leur juxtaposition. L'étude globale cherche au contraire à caractériser une totalité indépendamment des éléments qui la composent ; elle s'attaque d'emblée à la structure de l'ensemble, assignant ainsi leur place aux éléments avant même que d'en connaître la nature ; elle tend surtout à définir les êtres mathématiques par leurs propriétés fonctionnelles, estimant que le rôle qu'ils jouent leur confère une unité bien plus assurée que celle qui résulte de l'assemblage des parties.

La dualité du point de vue local et du point de vue global s'est tout d'abord présentée aux mathématiciens comme une opposition entre deux modes d'étude, irréductibles l'un à l'autre. Il semblait qu'il fallût choisir entre ces deux conceptions incompatibles, et de fait, la division qui s'instal-

lait ainsi au sein des mathématiques y subsiste encore aujourd'hui en bien des domaines. Nous voudrions rapidement montrer ce qu'il en est dans la théorie des fonctions analytiques, en géométrie, et dans la théorie des équations différentielles.

La conception de la fonction analytique selon les idées de CAUCHY et de RIEMANN est une conception globale ou tout au moins régionale. Elle repose en effet sur la considération d'ensemble d'un domaine du plan de la variable complexe $z = x + iy$. Une expression complexe $\zeta = u + iv$ représente pour CAUCHY une fonction analytique sur toute l'étendue de ce domaine, si l'on peut définir en chaque point du domaine, l'existence d'une dérivée unique de ζ par rapport à la variable complexe z . On sait que pour qu'une pareille dérivée existe, il faut que les fonctions u et v soient des fonctions continues de x et de y possédant des dérivées partielles continues du premier ordre et satisfaisant aux équations différentielles (dites de RIEMANN) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fonction analytique définie ainsi par l'unicité de la dérivée en chaque point n'est pas encore une notion définie du point de vue global mais elle conduit à la théorie de l'intégrale qui est au plus haut degré une notion globale : la valeur d'une fonction analytique en un point intérieur z_0 d'un domaine limité par une courbe fermée C est déterminée par la valeur de la fonction sur la courbe frontière :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

si le domaine en question est simplement connexe, c'est-à-dire n'a pour frontière que la seule courbe fermée C . On voit ainsi intervenir dans cette définition, des propriétés structurales de simple connexion relatives à la topologie

du domaine de base. Nous étudierons dans un chapitre ultérieur toute l'importance qu'ont prise avec RIEMANN ces considérations topologiques et comment elles ont permis de lier l'existence de fonctions analytiques à l'existence de domaines de base, définis dans leur totalité par leurs propriétés topologiques. Les conditions relatives à l'existence de la dérivée en chaque point ne jouent plus le premier rôle, et la fonction n'est plus tant définie par ses propriétés en chaque point du domaine que parce qu'elle est appropriée au domaine tout entier.

A la conception globale de RIEMANN s'oppose la conception locale de WEIERSTRASS. Une fonction analytique est essentiellement définie pour WEIERSTRASS au voisinage d'un point complexe z_0 , par une série de puissances à coefficients numériques, qui converge dans un « cercle de convergence » autour du point z_0 . La méthode du « prolongement analytique » permet ensuite de construire de proche en proche tout un domaine où la fonction est dite « analytique » et cela de la façon suivante : on prend comme nouveau centre un point intérieur du premier cercle, on obtient ainsi à la fois une nouvelle série et un nouveau cercle de convergence qui peut déborder le premier. La nouvelle série prolonge la première si leurs valeurs coïncident dans la partie commune des deux cercles. La série peut être prolongée ainsi dans toutes les directions jusqu'aux points dans le voisinage immédiat desquels les séries obtenues divergeraient. On voit donc que dans cette méthode le domaine n'est pas circonscrit à l'avance, mais résulte plutôt de la succession infinie des opérations locales.

La théorie de WEIERSTRASS s'est développée en opposition voulue avec la conception intégrale de CAUCHY et de RIEMANN. Si de nos jours certains auteurs comme M. BIEBERBACH présentent un exposé d'ensemble de la théorie des fonctions analytiques où les deux points de vue sont intimement mêlés, d'autres au contraire comme GOUR-

SAT ou M. COURANT (1) estiment nécessaire de maintenir une séparation entre les conceptions de CAUCHY-RIEMANN et celles de WEIERSTRASS. Nous aurons l'occasion de voir plus loin l'importance que cette séparation des points de vue présente également aux yeux de M. Hermann WEYL (2).

En ce qui concerne la géométrie et la théorie des groupes, nous ne pourrons mieux faire que de nous inspirer des articles célèbres que M. CARTAN a publiés sur la question (3). M. CARTAN met toujours au premier plan de ses exposés généraux sur la géométrie, les différences profondes qui ont séparé jusqu'à la théorie de la Relativité la conception globale de l'espace telle que l'a définie F. KLEIN dans son fameux « programme d'Erlangen » de 1872, et la conception infinitésimale de RIEMANN développée dans le mémoire de 1854 : « *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* ». Une géométrie au sens de KLEIN est l'étude des propriétés des figures qui sont conservées lorsqu'on fait subir à l'espace pris dans son ensemble certaines transformations formant ce qu'on appelle un groupe de transformations. La géométrie euclidienne est ainsi l'étude des propriétés des figures qui sont conservées lorsqu'on fait subir un même déplacement à tous les points de l'espace ; il se trouve que ces déplacements conservent toutes les propriétés des figures et en particulier leurs propriétés métriques. La géométrie affine étudie les propriétés qui se conservent

(1) Cf. R. COURANT, préface à l'*Allgemeine Funktionentheorie* de Ad. HURWITZ et R. COURANT.

(2) En fait, l'étude globale et l'étude locale n'amènent pas à des résultats strictement équivalents. M. BOREL a, en effet, démontré par la découverte de classes de fonctions quasi analytiques, que la classe des fonctions de CAUCHY est plus étendue que la classe des fonctions de WEIERSTRASS.

(3) Voir principalement : E. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace. Bulletin des Sc. Math.*, t. 48, année 1924, p. 294. *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle. Enseignement math.*, année 1924, p. 1 et surtout *La théorie des groupes et la géométrie. Enseignement math.*, année 1927, p. 211.

par une transformation linéaire : le parallélisme de deux droites par exemple ; la géométrie projective étudie les propriétés invariantes par rapport à une transformation homographique comme le rapport anharmonique de quatre points sur une droite ou le degré d'une courbe algébrique. Quelles que soient les propriétés dont on recherche l'invariance par rapport à un groupe de transformations, la caractéristique essentielle des espaces de KLEIN est leur homogénéité. Le groupe opère de la même façon sur tous les points de l'espace. Les espaces de RIEMANN sont au contraire dépourvus de toute espèce d'homogénéité. Chacun d'eux est caractérisé par la forme de l'expression qui définit le carré de la distance de deux points infiniment voisins. Cette expression est ce qu'on appelle une forme différentielle quadratique qui généralise la formule euclidienne de la distance de deux points : $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$. Le ds^2 riemannien à deux dimensions est de la forme suivante : $ds^2 = g_{11} du_1^2 + g_{12} du_1 du_2 + g_{21} du_2 du_1 + g_{22} du_2^2$. Dans une variété à n dimensions on a la formule générale : $ds^2 = \sum_{i,j}^n g_{ij} du_i du_j$. Les g_{ij} sont des coefficients absolument quelconques et qui varient de point en point. Il en résulte, comme dit M. CARTAN (1), que « deux observateurs voisins peuvent repérer dans un espace de RIEMANN les points qui sont dans leur voisinage immédiat, mais ils ne peuvent pas sans convention nouvelle se repérer l'un par rapport à l'autre ». Chaque voisinage est donc comme un petit bout d'espace euclidien, mais le raccordement d'un voisinage au voisinage suivant n'est pas défini et peut se faire d'une infinité de manières ; l'espace de RIEMANN le plus général se présente ainsi comme une collection amorphe de morceaux juxtaposés sans être rattachés les uns aux autres.

(1) E. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace*. Bulletin Sc. math., année 1924, p. 297.

La distinction qui existe ainsi entre une géométrie de KLEIN et une géométrie de RIEMANN se retrouve entre la théorie de la Relativité restreinte et la théorie de la Relativité généralisée. La Relativité restreinte est de type kleinéen ; elle étudie dans l'Univers quadridimensionnel de MINKOWSKI les invariants du groupe de LORENTZ ; la Relativité généralisée est une géométrie riemannienne où les g_{ij} dépendent en chaque point de la distribution de la matière en ce point. L'espace de la théorie de la Relativité généralisée ne présente cependant pas cette absence complète d'organisation qui caractérise les espaces de RIEMANN les plus généraux ; une physique où les lois de l'Univers varieraient de point en point est en effet inconcevable. L'espace riemannien d'EINSTEIN possède ce que M. CARTAN appelle une connexion euclidienne, c'est-à-dire qu'il est possible d'y repérer de proche en proche les différentes positions d'un observateur les unes à partir des autres. Nous étudierons dans le chapitre suivant les problèmes philosophiques qui sont liés à cette connexion euclidienne des espaces riemanniens ; si on y dépasse le point de vue purement local, on n'obtient encore aucune connaissance de l'Univers dans son ensemble ; le fossé qui sépare le point de vue local du point de vue global subsiste toujours, et c'est de cette disparité que proviennent pour M. CARTAN les principales difficultés de la théorie unitaire du champ, telle qu'EINSTEIN l'a exposée en 1929. La métrique de l'Univers donne naissance à un système d'équations aux dérivées partielles pour lequel EINSTEIN cherche des solutions sans singularités existant dans tout l'espace. Cela exigerait la connaissance des propriétés topologiques de l'espace-temps pris dans sa totalité, comme de savoir par exemple s'il est ouvert ou fermé. « On voit ainsi, dit M. CARTAN, que la recherche des lois locales de la Physique ne peut être dissociée du problème cosmogonique. On ne peut du reste pas dire que l'un précède l'autre ; ils sont inextricablement mêlés l'un à

l'autre (1). » L'intégration globale n'est pas le prolongement de l'intégration locale ; la solution du problème local exige une connaissance préalable de la structure de l'Univers.

Partis d'une opposition de points de vue qui semblait propre à la géométrie, nous retrouvons le même conflit dans les problèmes d'une importance philosophique considérable, puisque de leur solution dépend l'interprétation du déterminisme de la physique ; ce sont des problèmes relatifs aux conditions d'existence des solutions des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles.

Les analystes du XIX^e siècle ont pu établir dans la plupart des cas des théorèmes d'existence qui permettent d'affirmer l'existence et éventuellement l'unicité de la solution d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles, définie dans tout le domaine où une certaine inégalité est vérifiée, et cela en s'appuyant uniquement sur la connaissance de données locales, en un point origine par exemple.

C'est ainsi qu'une équation différentielle du second ordre (2) de la forme $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ admet en général une solution et une seule correspondant à des conditions initiales données, à savoir que pour $x = a$, y prenne une valeur numérique donnée b et $\frac{dy}{dx}$ prenne la valeur b' . La solution d'un pareil problème est ainsi déterminée par des conditions locales, dites de CAUCHY. M^{me} KOWALEWSKA a établi pour les équations aux dérivées partielles du second ordre un théo-

(1) E. CARTAN, *Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ*. Paris. Hermann 1932, p. 18.

(2) Rappelons qu'une équation différentielle établit une relation entre une fonction d'une seule variable et un certain nombre de ses dérivées successives, tandis qu'une équation aux dérivées partielles établit une relation entre une fonction de plusieurs variables et un certain nombre de ses dérivées partielles par rapport à toutes ou à plusieurs de ces variables.

rème analogue au théorème de CAUCHY pour les équations différentielles : si l'équation aux dérivées partielles

$$F\left(x, x_1 \dots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) = 0 \quad \begin{matrix} i, k = 0, 1, 2 \dots n \\ x_0 = x \end{matrix}$$

peut être résolue par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, x_1 \dots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right), \quad i, k = 1 \dots n$$

la fonction f étant holomorphe (1) par rapport à $x, x_1 \dots x_n, u$, et à toutes les autres dérivées, cette équation admet une solution et une seule, holomorphe en $x, x_1 \dots x_n$, et satisfaisant pour $x = 0$ aux conditions :

$$u = g(x_1 \dots x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h(x_1 \dots x_n),$$

les fonctions g et h étant holomorphes en $x_1 \dots x_n$. Si l'on envisage alors l'ensemble des points $x = 0$ comme déterminant un plan ou une surface [de l'espace à n dimensions (n étant le nombre de variables indépendantes de l'équation)], on peut interpréter (2) le théorème de M^{me} KOWALEWSKA en termes de déterminisme classique : La connaissance de la valeur d'une fonction et de l'une de ses dérivées sur tous les points d'une surface S permet d'affirmer l'existence et la régularité de cette fonction dans un certain voisinage de la surface S .

Pendant que l'analyse établissait ainsi des théorèmes

(1) Une fonction analytique $f(z)$ est holomorphe dans une région connexe D du plan de la variable complexe z , si elle est continue dans D , et si à tout point z de D correspondant des valeurs uniques pour $f(z)$ et $f'(z)$.

(2) Voir pour tout ce paragraphe : *l'Enseignement mathématique*, t. XXXV, n^{os} 1-2, août 1936. Ce fascicule reproduit les conférences sur la théorie des équations aux dérivées partielles faites à l'Université de Genève en juin 1935. Nous nous inspirons particulièrement de la conférence de M. HADAMARD, à laquelle nous empruntons également la forme des équations citées dans le texte.

d'existence locaux, l'étude directe de certains phénomènes physiques amenait à la considération de problèmes bien différents : ce sont tous les problèmes du type du fameux problème de DIRICHLET où l'on est amené à démontrer l'existence d'une fonction satisfaisant à l'intérieur d'un volume V à une certaine équation aux dérivées partielles, (l'équation de LAPLACE : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$) et prenant à la frontière du domaine des valeurs données à l'avance. On rencontre de pareilles fonctions dans l'étude de l'équilibre électrique ou calorifique, lorsqu'il s'agit par exemple de déterminer la température qui finira par s'établir au sein d'un domaine, sur la frontière duquel on répartit une succession continue de températures, invariables au cours du temps. Le fait physique qu'une température d'équilibre finit effectivement par s'établir, a donné aux mathématiciens la certitude de l'existence de la fonction cherchée avant même qu'ils en eussent une démonstration rigoureuse.

Si l'on réfléchit à la nature des conditions aux limites du problème de DIRICHLET, on se rend compte, remarque M. HADAMARD, qu'il y a entre elles et les données initiales des théorèmes de CAUCHY-KOWALEWSKA, comme une profonde contradiction. Puisque, la connaissance de la valeur de la fonction en chaque point de la surface S détermine complètement cette fonction dans le cas du problème de DIRICHLET, « il apparaît évident qu'on n'a pas le droit de se donner le long de S la valeur de u et celle d'une de ses dérivées » comme on le fait dans l'énoncé du théorème général. L'apparence de contradiction est du point de vue mathématique évitable, d'une part parce que les données initiales du théorème général d'existence sont soumises à des conditions rigoureuses d'analyticité, tandis que les données « aux limites » sont de nature beaucoup plus générale, et d'autre part parce que la solution dont le théorème de M^{me} KOWALEWSKA affirme l'existence n'est définie que pour

un voisinage plus ou moins immédiat de la surface S tandis que dans le cas d'un problème « à la DIRICHLET » la solution cherchée doit être définie et régulière dans tout le volume V dont la surface S est la frontière. Il n'en est pas moins vrai que la théorie des équations aux dérivées partielles régit des processus physiques nettement différents : les uns, comme la propagation de la lumière, sont en évolution libre, et le schéma déterministe peut leur être parfaitement appliqué. Les autres, au contraire, sont circonscrits par les données aux limites. Il faut connaître au préalable non plus seulement des données initiales, mais les limites extrêmes entre lesquelles les phénomènes étudiés peuvent osciller. On démontre en effet que si la fonction cherchée n'est pas une constante, c'est sur la frontière du domaine, et pour des valeurs données à l'avance, qu'elle atteint, dans le cas d'un problème de DIRICHLET, son maximum et son minimum. Il semble alors que pour un phénomène physique dont l'évolution est « dirigée » et que des limites précises enserrant de toutes parts, il faille faire appel à des interprétations philosophiques inattendues en mathématiques, où le système physique serait comparable à une unité organique. Nous retrouverons du reste des considérations de ce genre au chapitre VI, et verrons de nouveau comment les recherches de maximum et de minimum ont pu parfois suggérer l'idée d'une finalité inhérente à certaines théories mathématiques et à certains phénomènes physiques.

Nous n'aborderons pas ici l'étude de ces questions, qui ressortissent du reste davantage à la philosophie de la physique et nous bornerons à l'aspect purement mathématique de la dualité de l'étude locale et de l'étude globale.

La constatation de cette dualité suggère naturellement aux mathématiciens la recherche d'une synthèse. Etant donné que des éléments composés entre eux par un processus quelconque de cheminement progressif peuvent ne donner naissance à aucun être susceptible de caractéristiques

globales, il faudrait, pour que l'on soit sûr d'arriver à un résultat, que la structure topologique de l'ensemble se réfléchisse dans les propriétés de ses parties. Cela peut donner lieu à deux sortes de problèmes : ou bien l'on part de l'ensemble dont on connaît la structure et l'on cherche les conditions que doivent satisfaire les éléments pour être éléments de cet ensemble, ou bien l'on se donne des éléments jouissant de certaines propriétés et l'on cherche à lire dans ces propriétés locales la structure de l'ensemble en lequel ces éléments se laissent ranger (1). Dans l'un et l'autre cas on cherche à établir une liaison entre la structure du tout et les propriétés des parties par quoi se manifeste dans les parties l'influence organisatrice du tout auquel elles appartiennent.

Nous rencontrons ainsi en mathématiques des considérations qui peuvent à première vue paraître étrangères aux mathématiques et y apporter comme le reflet de certaines conceptions propres à la biologie ou à la sociologie. Il est évident que l'être mathématique tel que nous le concevons n'est pas sans analogie avec un être vivant ; nous croyons cependant que l'idée de l'action organisatrice d'une structure sur les éléments d'un ensemble est pleinement intelligible en mathématiques, même si transportée dans d'autres domaines, elle perd de sa limpidité rationnelle. La prévention que le philosophe éprouve parfois à l'égard des arrangements trop harmonieux ne vient pas tant de ce qu'ils subordonnent les parties à l'idée d'un tout qui les organise, que de ce que la manière dont s'opère cette organisation de l'ensemble est tantôt d'un anthropomorphisme naïf et tantôt d'une mystérieuse obscurité. La biologie comme la sociologie manquent en effet souvent des outils logiques nécessaires pour constituer une théorie de la solidarité du tout

(1) Cette distinction se trouve dans l'article de H. HOPF que nous analysons plus loin.

et de ses parties : nous verrons par contre que les mathématiques peuvent rendre à la philosophie le service éminent de lui offrir l'exemple d'harmonies intérieures dont le mécanisme satisfait aux exigences logiques les plus rigoureuses.

Nous allons rapidement passer en revue trois théories qui nous apporteront autant de modèles où se réalise cette implication du tout dans la partie : la géométrie différentielle dans ses rapports avec la topologie, la théorie des groupes et la théorie de la représentation approchée des fonctions. Ces trois exemples nous ont paru particulièrement suggestifs parce qu'ils permettent d'arriver à une même conclusion en ce qui concerne les conditions que doit remplir la structure d'un être mathématique afin qu'au sein de cet être règne comme une solidarité organique.

Géométrie différentielle et topologie.

L'étude des relations entre la topologie, étude éminemment synthétique des êtres géométriques (1), et la géométrie différentielle a donné lieu à un grand nombre de recherches poursuivies méthodiquement sous l'impulsion de W. BLASCHKE à Hambourg ; nous ne nous proposons ici qu'une analyse sommaire d'un mémoire de H. HOPF où sont contenues les idées essentielles qui dominent la question.

HOPF, se posant le problème général de savoir quels sont les liens qui peuvent exister entre les propriétés topologiques et les propriétés différentielles d'une surface, est amené à distinguer deux problèmes réciproques dont nous avons souligné plus haut l'intérêt : un problème de métrisation et un problème de prolongement. Leur énoncé est d'un tel intérêt logique que nous ne pouvons pas ne pas repro-

(1) Il s'agit ici aussi bien de la topologie « ensembliste », que de la topologie combinatoire ou topologie algébrique.

duire le texte même de l'auteur (1) : « Le problème de métrisation est le suivant : on donne une surface topologique F . Il s'agit de déterminer sur cette surface une métrique différentielle (un ds^2)... Quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire la métrique de la surface ? Quelles propriétés métriques sont prescrites à l'avance par la topologie de F ? Par quelles limitations est restreint l'arbitraire avec lequel je puis fixer les g_{ik} à l'endroit où je commence à fixer la métrique de la surface ? » Le problème inverse, du prolongement, est le suivant : « On me donne un petit morceau d'une surface F ; je puis examiner ce morceau avec toute la précision possible, mais par contre je n'ai pas la possibilité d'étudier la surface dans son ensemble. Quelles conclusions puis-je dégager de la connaissance que j'ai du petit morceau de la surface, en ce qui concerne la surface totale et en particulier sa structure topologique ? » Ces problèmes ne peuvent être abordés que si l'on précise le sens de l'expression : « la surface totale ». Une surface n'est totale que si elle ne peut être « prolongée » à son tour en une autre surface et pour qu'il en soit ainsi, HOPF et RINOW (2) énoncent quatre conditions équivalentes dont chacune est suffisante pour faire de la surface un « tout » indépendant. Nous n'insisterons que sur l'une de ces conditions parce que nous retrouverons la nécessité d'une conditions analogue dans tous les exemples de ce chapitre ; il faut que la surface soit *complète* au sens de la métrique. Voici ce qu'il faut entendre par surface complète au sens de la métrique. On appelle suite fondamentale sur une surface, une suite infinie de points $a_1, a_2 \dots a_n \dots$, telle qu'à partir d'un certain rang, la distance de deux points soit infiniment petite. La suite est dite convergente vers une limite A si à partir d'un certain point la

(1) H. HOPF, *Differentialgeometrie und topologische Gestalt. Jahresbericht der deutschen Math. Vereinig.*, t. XII, année 1932, p. 209 sqq.

(2) HOPF und RINOW, *Über den Begriff der vollständigen Differentialgeometrischen Fläche. Comment. Math. helvet.*, 3 (1931).

distance des points de la suite à ce point A devient également infiniment petite. S'il s'agissait de nombres réels, toute suite fondamentale serait convergente, en vertu du théorème de CAUCHY, c'est-à-dire qu'elle tendrait vers une limite qui ferait elle aussi partie de l'ensemble des nombres réels. Lorsqu'il s'agit de points sur une surface, il n'en est plus toujours ainsi et la surface est dite justement complète au sens de la métrique, lorsque toute suite fondamentale converge vers une limite située elle aussi sur la surface. Lorsqu'un ensemble de points, une surface par exemple n'est pas complète, on peut la compléter en lui ajoutant les points qui lui manquent, à savoir les limites de ses suites fondamentales ; or ce qui est essentiel dans les résultats de HOPF et de RINOW, c'est que des propriétés topologiques d'une surface ne se réfléchissent dans les propriétés des parties, que si la surface n'est pas susceptible d'être complétée ; ce n'est qu'à cette condition d'achèvement que sont valables les résultats que nous allons maintenant exposer.

Soit pour une surface, le fait d'être simplement connexe, c'est-à-dire telle que toute courbe fermée puisse par déformation continue être réduite sur cette surface à un point. C'est là une propriété topologique de la surface. Une surface est dite à courbure constante si une certaine quantité définie en chaque point, au moyen des coefficients g_{ik} du ds^2 de la surface et qu'on appelle la courbure, est la même pour toutes les valeurs des g_{ik} . La courbure étant une notion purement locale, la constance de la courbure est bien une propriété locale, définie pour chaque élément de la surface. Cela étant, on a le théorème suivant : Pour toute courbure K il existe, à une isométrie près, une seule surface simplement connexe de courbure constante K , à savoir la surface d'une sphère, le plan euclidien ou le plan hyperbolique selon qu'on a $K > 0$, $K = 0$ ou $K < 0$. Si l'on abandonne la condition de simple connexion, on peut ranger les surfaces en trois classes topologiques, les classes C_+ , C_0 , C_- . La classe C_+

contient deux types : la sphère et le plan projectif; la classe C_0 contient cinq types : le plan, le cylindre, le tore, le cylindre non-orientable et la surface fermée non-orientable de caractéristique nulle (1) ; la classe C_- contient toutes les surfaces à l'exception des quatre surfaces fermées contenues dans C_+ et C_0 (sphère, plan projectif, tore et la surface fermée non-orientable qui vient d'être défini). On a alors le théorème suivant : seules les surfaces de la classe C_+ peuvent être à courbure constante positive, les surfaces de la classe C_0 à courbure constante nulle et celles de la classe C_- à courbure constante négative (1). Les propriétés métriques sont donc en relation étroite avec la classe topologique de la surface totale. C'est ainsi par exemple qu'une surface à courbure constante positive est nécessairement fermée (problème de prolongement) ou que sur une surface fermée, à courbure constante, le signe de la courbure est le même que celui d'un invariant topologique global de cette surface, la caractéristique d'EULER (problème de métrisation) (2). On voit l'importance de résultats de ce genre pour les problèmes cosmogoniques dont nous parlions plus haut. Le ds^2 de l'espace n'est pas déterminé par la forme de l'espace, mais le choix du ds^2 est soumis aux conditions très restrictives que fixe la topologie de l'espace global.

La théorie des groupes clos.

Nous allons exposer maintenant des résultats dus à H. WEYL et à E. CARTAN où la métrique peut, dans certains cas, être entièrement déterminée par une propriété globale du groupe associé à l'espace en question. L'importance de

(1) La caractéristique d'une surface est une propriété de topologie algébrique sur laquelle nous reviendrons plus loin (cf. chap. VI).

(2) HOPF, *Differentialgeometrie und topologische Gestalt*, p. 213.

ces résultats vient de ce qu'ils permettent de rapprocher parfois des espaces de type kleinéen et des espaces de type riemannien, malgré toutes les différences de structure que nous leur avons reconnues plus haut.

Le théorème de H. WEYL utilisé par E. CARTAN est le suivant : un groupe linéaire clos à coefficients réels, laisse invariante une forme quadratique définie positive (1). On voit tout de suite l'intérêt immense de ce théorème : le groupe est défini par des caractéristiques globales puisqu'il est clos ; la forme quadratique pourra par contre servir de métrique locale, de ds^2 , dans un espace associé de manière convenable au groupe par rapport auquel cette forme quadratique est invariante. Dans les problèmes étudiés par M. HOPF, les propriétés globales de la surface ne pouvaient s'inscrire dans la nature des éléments infinitésimaux de la surface que si cette surface était complète ; nous retrouvons avec le théorème de WEYL une condition d'achèvement analogue. Un groupe continu peut en effet être conçu comme engendrant une variété topologique si l'on fait correspondre à chaque transformation du groupe un point de la variété ; il n'est pas nécessaire pour que cette variété soit définie qu'elle possède une métrique, il suffit qu'elle soit constituée par un ensemble de « voisinages » satisfaisant à certaines conditions énoncées par M. CARTAN (2) ; on peut alors définir pour la variété d'un groupe une condition de clôture ou de fermeture qui joue dans le cas

(1) E. CARTAN, *La théorie de groupes finis et continus et l'Analysis Situs Mémoires des Sc. Math.*, fascicule 42. Paris, 1930. Rappelons le sens de quelques termes : un groupe étant un ensemble de transformations opérant sur les points d'un espace, est dit linéaire si les nouvelles coordonnées x'_i d'un point s'expriment algébriquement en fonction des anciennes coordonnées x_j par des relations du type $x'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$. Les a_{ij} sont les coefficients de la transformation.

Une forme quadratique de deux variables est par exemple l'expression $Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Elle est définie si son discriminant est négatif.

(2) E. CARTAN, *La théorie des groupes...* p. 3.

d'espaces définis par un système de voisinages le rôle d'achèvement que joue dans le cas d'espaces métriques la propriété d'être complet : Un point A étant point d'accumulation pour un ensemble infini de points distincts d'une variété, si tout voisinage de A contient au moins un point de l'ensemble distinct de A , la variété est dite close si tout ensemble infini de points admet sur cette variété un point d'accumulation. Cette propriété d'achèvement au sens de la topologie est distincte de l'achèvement au sens de la métrique mais suffit en tout cas à conférer à la structure d'un groupe un caractère de fermeture dont la présence est indispensable pour que cette structure se réfléchisse localement, dans la métrique de l'espace auquel le groupe est associé. Le théorème de WEYL ne peut s'appliquer directement aux groupes de KLEIN qui opèrent sur un espace homogène donné E , car ces groupes ne sont en général pas linéaires; aussi M. CARTAN procède-t-il de la façon suivante : il adjoint au groupe G des transformations qui opèrent sur l'espace E , le groupe Γ des automorphies internes du groupe G : ce groupe adjoint se trouve être linéaire ainsi que tous ses sous-groupes. M. CARTAN considère alors un certain sous-groupe déterminé γ de Γ (1), et démontre le théorème suivant : Si le groupe linéaire γ est clos, il existe dans l'espace homogène E une métrique riemannienne invariante par G (2). Il y a là une liaison essentielle entre la topologie du groupe de KLEIN et la métrique locale d'un espace riemannien dont M. CARTAN dégage assez de conséquences pour pouvoir écrire au terme d'un article que nous avons cité plus haut : « Partis de l'antagonisme entre les géométries de KLEIN et la géométrie de RIEMANN, nous arrivons après un long détour à cette constatation que c'est sous la forme riemannienne

(1) γ est le sous-groupe du groupe linéaire adjoint qui correspond au plus grand sous-groupe g de G qui laisse fixe un point de l'espace.

(2) E. CARTAN, *La théorie des groupes...*, p. 30 et p. 43.

que les géométries de KLEIN montrent le mieux leurs propriétés fondamentales (1). »

Représentation approchée des fonctions.

Les domaines où nous allons étudier maintenant une solidarité entre la structure de l'ensemble et la nature individuelle des éléments, sont des ensembles de fonctions. Nous considérerons tout d'abord l'ensemble $K(\mathcal{E})$ des fonctions continues, dont la valeur est un nombre complexe et qui sont définies sur un ensemble fermé de points $\mathcal{E}$. Il est possible d'envisager cet ensemble de fonctions comme formant un espace $\Gamma(\mathcal{E})$, satisfaisant aux axiomes des espaces vectoriels, et qu'on appelle l'espace des fonctions continues dans $\mathcal{E}$. Les propriétés globales de cet espace sont essentiellement des propriétés d'achèvement comparables à celles que nous avons déjà définies plus haut ; les propriétés individuelles des fonctions qui sont éléments de cet espace concernent un mode de décomposition qui s'applique à chacune d'elles, et nous verrons le lien étroit qui unit les propriétés de l'ensemble aux propriétés des éléments.

L'achèvement au sens de la métrique se définit pour un espace de fonctions de façon analogue à l'achèvement d'un espace de points. Il suffit de définir pour deux fonctions quelconques f et g un nombre $\|f - g\|$ qui est dit la distance de ces deux fonctions ; on peut alors définir sur l'espace de fonctions des suites fondamentales et des suites convergentes (au sens de la convergence uniforme) (2). L'espace est complet si toute suite fondamentale y est conver-

(1) E. CARTAN, *La théorie des groupes et la géométrie. Ens. Math.*, année 1927, p. 222.

(2) La distance $\|f - g\|$ de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est définie comme le maximum de la valeur absolue $|f(x) - g(x)|$, x appartenant à l'ensemble de base $\mathcal{E}$.

gente et l'espace $\Gamma(\mathcal{E})$ des fonctions continues est précisément un pareil espace complet.

Pour étudier les propriétés individuelles de décomposition des fonctions continues, nous commencerons par le cas simple où l'espace de points $\mathcal{E}$ est un intervalle fermé $[a, b]$ de l'espace euclidien. WEIERSTRASS a démontré que si $f(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$, cette fonction peut être approchée d'aussi près que l'on voudra par un polynôme en x , $P(x) = \sum_0^n c_k x^k$. On a ainsi quel que soit $\varepsilon > 0$, $\| f(x) - P(x) \| < \varepsilon$. Cette approximation d'une fonction continue quelconque par un polynôme est immédiatement interprétable en termes de décomposition pour la fonction en question. On démontre en effet que l'on a le droit de déduire de l'inégalité $\| f - P \| < \varepsilon$ l'égalité $f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k x^k$.

La fonction se décompose ainsi en une série uniformément convergente d'une infinité de termes. Si nous cherchons maintenant à préciser le sens de ce résultat, nous allons voir qu'en lui s'unissent le point de vue global d'achèvement et le point de vue de la décomposition individuelle. L'égalité $f(x) = \sum_0^\infty c_k x^k$ concerne bien le mode particulier de décomposition de la fonction $f(x)$; mais si l'on considère la série $\sum_0^\infty c_k x^k$, on peut y distinguer une infinité de polynômes

$P_0 \dots P_n \dots$, d'un nombre fini de termes : $\sum_{k=0}^{k=n} c_k x^k$ et de de-

gré croissant. La convergence uniforme de cette suite de polynômes vers une limite $f(x)$ résulte cette fois, non plus des propriétés individuelles de cette limite, mais de la propriété globale de fermeture de l'espace des fonctions continues. En d'autres termes, le fait que dans un voisinage infinitésimal de la fonction $f(x)$ se trouve un polynôme $P(x)$ concerne bien la fonction $f(x)$ considérée isolément, mais ce fait se rattache immédiatement à la totalité des cas analogues. Dans l'espace des fonctions continues l'ensemble

des polynômes en x est partout dense, c'est-à-dire que dans tout voisinage de fonction continue se trouve un polynôme, et la démonstration de ce théorème fait appel à la fermeture de l'espace.

Il existe, en analyse, d'autres exemples où se montre une pareille liaison entre la structure globale d'un ensemble de fonctions et le mode de décomposition individuelle de ces fonctions. Ainsi par exemple toute fonction continue et différentiable dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$ est représentable en série convergente de polynômes trigonométriques (ou série de FOURIER) :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ;$$

les a_n et les b_n étant liés à l'expression de $f(x)$ dans l'intervalle considéré par les formules :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Ce théorème peut être présenté comme une conséquence du théorème de WEIERSTRASS : l'ensemble des fonctions continues et différentiables dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$ forme également un espace complet, et cette propriété globale d'achèvement se traduit par un nouveau mode de décomposition individuelle des fonctions qui appartiennent à cet ensemble.

Les études qui précèdent montrent qu'il est impossible de considérer un « tout » mathématique comme résultant de la juxtaposition d'éléments définis indépendamment de toute considération d'ensemble relative à la structure du tout en lequel ces éléments s'intègrent. Il existe ainsi une descente du tout vers la partie, comme une montée de la partie vers le tout, et ce double mouvement s'éclairant à la lumière de l'idée d'achèvement, nous a permis d'observer un premier

aspect de l'organisation interne des êtres mathématiques. Si l'on veut bien admettre que l'étude de pareilles liaisons structurales est une tâche essentielle pour la philosophie mathématique, on ne peut manquer de remarquer les différences qui séparent la philosophie mathématique ainsi conçue de tout le courant de pensée logistique qui s'est développé après que RUSSELL eut découvert les paradoxes de la théorie des ensembles. Les logiciens ont toujours voulu depuis interdire les définitions non prédicatives, c'est-à-dire celles où les propriétés d'un élément sont solidaires de l'ensemble auquel cet élément appartient. Les mathématiciens n'ont jamais voulu admettre la légitimité de cette interdiction, montrant à juste titre la nécessité de faire parfois appel, pour définir certains éléments d'un ensemble, à des propriétés globales de cet ensemble. Tout le chapitre qu'on vient de lire tend à montrer la fécondité de ce point de vue. Nous espérons ainsi rendre évidente cette idée que la véritable logique n'est pas *a priori* par rapport aux mathématiques mais qu'il faut à la logique une mathématique pour exister.

CHAPITRE II

Propriétés intrinsèques et propriétés induites.

Lorsqu'on étudie les propriétés d'un être géométrique, on est amené à distinguer entre les propriétés qui résultent pour cet être de la considération de sa nature intrinsèque, et celles que lui confèrent ses relations avec le milieu qui l'entoure. Les propriétés intrinsèques d'un être sont indépendantes de la position de cet être dans l'espace, elles sont même indépendantes de l'existence d'autres êtres : elles appartiennent en propre à l'être que l'on envisage. Les propriétés de relation ne peuvent au contraire être attribuées à un être mathématique que si l'on se réfère à autre chose qu'à lui : c'est tantôt un système de références¹ commun à plusieurs êtres, tantôt un espace ambiant dont les propriétés peuvent être définies indépendamment de tout contenu, tantôt encore un certain nombre d'autres êtres qui soutiennent avec le premier des relations de voisinage, d'incidence, d'orientation, etc... Les propriétés de relation traduisent en somme la solidarité d'un être et de l'univers au sein duquel il est plongé.

On sait qu'une des différences essentielles entre la philosophie mathématique de LEIBNIZ et celle de KANT réside dans l'opposition de leurs conceptions relatives aux propriétés extrinsèques des êtres géométriques. Nous voudrions rapidement résumer ici un débat qui, nous le verrons plus loin, retrouve aujourd'hui en géométrie différentielle et en topologie toute son actualité.

La conception leibnizienne de la monade, aussi bien en ce qui concerne la géométrie qu'en ce qui concerne l'existence des choses créées, repose sur la réduction des rapports que la monade soutient avec toutes les autres monades en propriétés internes, enveloppées dans l'essence de la monade individuelle. On peut distinguer deux moments importants dans cette réduction : celui où LEIBNIZ conçoit la sympathie universelle de toutes les substances et celui où il inscrit cette sympathie dans la loi du devenir interne de chaque monade considérée comme isolée de toutes les autres. Dans la lettre à ARNAULD de septembre 1687, il explique qu'une chose peut en exprimer une autre comme « une projection de perspective exprime son géométral » et plus loin il écrit : « Toutes les substances sympathisent avec toutes les autres, et reçoivent quelque changement proportionnel, répondant au moindre changement qui arrive dans tout l'Univers (1). » La notion de monade ne se précise pourtant que dans le *Système nouveau de la Nature et de la communication des substances aussi bien que de l'union qu'il y a entre l'âme et le corps* paru en 1695. « Chacune de ces substances », écrit-il, « représentant exactement l'univers à sa manière, et suivant un certain point de vue, et les perceptions ou expressions des choses externes arrivant à l'âme à point nommé, en vertu de ses propres lois, comme dans le monde à part et comme s'il n'existait rien que Dieu et elle... il y aura un parfait accord entre toutes les substances (2). »

Tous les commentateurs de KANT ont montré l'importance pour la formation de la théorie kantienne de l'espace, de deux textes de la période précritique, l'un de 1768 « *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* », l'autre de 1770, la dissertation « *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* », où s'ébauchent

(1) *Leibniz à Arnauld*. Ed. Gerhardt, t. II, p. 112.

(2) *Système nouveau*. Ed. Gerhardt, t. IV, p. 484.

les idées de l'Esthétique transcendantale. Les positions respectives que les corps de l'espace occupent les uns par rapport aux autres, ne se laissent pas décrire uniquement en termes de relations mutuelles entre ces corps, elles se réfèrent nécessairement à un système de références privilégié et universel, celui qu'établissent dans l'espace les distinctions fondamentales de la gauche et de la droite, du haut et du bas, de l'avant et de l'arrière du corps humain. La distinction de la main gauche et de la main droite est la plus importante. Elle impose à l'espace comme les lignes d'un clivage auquel sont soumis tous les corps de l'espace. Si l'on regarde en effet la manière dont les cheveux sont plantés sur la tête, dit KANT, dont se déroulent les spirales des coquilles du limaçon, dont le houblon monte à son tuteur (1), on observe partout dans la nature un mouvement privilégié de la gauche vers la droite et qu'aucun artifice ne peut effacer. Une des conséquences les plus célèbres de cette opposition de la gauche et de la droite, c'est l'incongruence des figures symétriques. La main gauche et la main droite possèdent, quand on les examine en elles-mêmes, exactement les mêmes parties, celles-ci sont dans chaque main disposées de la même façon, les deux mains sont donc identiques et semblables (*gleich und ähnlich*) mais si elles sont bien symétriques, elles ne sont pas superposables. Cette incongruence des figures symétriques qui se rattache à la structure de notre propre corps se retrouve en géométrie pure et KANT invoque en faveur de sa thèse le cas des triangles sphériques qui peuvent être parfaitement identiques et semblables, sans se recouvrir cependant. Il y a là des faits sensibles, dont aucune analyse rationnelle des propriétés internes des corps ne peut rendre compte et qui résultent de la différence des places que ces corps occupent dans l'es-

(1) KANT, *Œuvres*, éd. Ac. Berlin, t. II, p. 396.

pace sensible. La dépendance des corps par rapport à l'espace ambiant est donc liée chez KANT de façon étroite au fait que la raison ne peut caractériser de façon abstraite que les propriétés intrinsèques des corps géométriques et que celles qui résultent de leur position dans l'espace ne peuvent être appréhendées que par l'intuition sensible qui se réfère à l'orientation de l'espace entier : « quæ jaceant in spatio dato unam plagam versus, quæ in oppositam vergant, discursive describi s. ad notas intellectuales revocari nulla mentis acie possunt »... et plus loin : « patet hic non nisi quadam intuitione pura diversitatem nempe discongruentiam notari posse » (1). Nous reviendrons plus loin sur ces limitations éventuelles de la géométrie de l'intrinsèque.

Il est à peine besoin de rappeler comment la constitution par GAUSS et RIEMANN d'une géométrie différentielle qui étudie les propriétés intrinsèques d'une variété, indépendamment de tout espace dans lequel cette variété serait plongée, élimine toute référence à un contenant universel ou à un centre de coordonnées privilégié. Les « *Disquisitiones circa superficies curvas* » de GAUSS envisagent une surface réelle à deux dimensions et définissent une métrique sur cette surface du point de vue d'un observateur lié à la surface et qui par conséquent ne pourrait la considérer d'une position de l'espace extérieure à elle. Le point de vue de RIEMANN, dont nous avons parlé au chapitre précédent, généralise dans le cas d'un ds^2 à n variables le point de vue « superficiel » de GAUSS. Les notions de distance, de courbure, de géodésique y ont un sens intrinsèque, car elles sont définies de proche en proche, sans sortir de la variété ; la distinction de l'espace et de la variété s'efface, il ne subsiste plus que l'espace de cette variété. On sait comment la théorie de la relativité accentue encore cette identification du contenant et du contenu : la matière n'est plus considérée

(1) KANT, *Œuvres*, éd. Ac. Berlin, t. II, p. 419.

comme située dans l'espace, les propriétés de l'espace en chaque point étant déterminées par la densité de la matière en ce point. La géométrie et la physique se constituent solidairement, de sorte qu'il est impossible de séparer l'espace, la variété riemannienne et la matière.

Une pareille caractérisation intrinsèque des êtres géométriques n'est pas sans amener parfois des difficultés d'interprétation chez les philosophes. L'idée que cette variété riemannienne qu'est l'espace d'EINSTEIN serait fermée, évoque souvent l'image d'une surface fermée que l'intuition ne pourrait s'empêcher de situer dans un espace infini à trois dimensions, et pourtant en dehors de laquelle, par un paradoxe incompréhensible, il ne pourrait y avoir ni matière, ni même d'espace. Le paradoxe disparaît quand on se rend compte qu'une variété sur laquelle est défini un ds^2 à plus de deux dimensions n'est aucunement susceptible de comparaison intuitive avec une surface. Les notions de la géométrie différentielle intrinsèque sont purement intellectuelles, elles caractérisent un mode d'exploration mathématique d'une variété par cheminement sur cette variété pour l'opposer à la méthode extrinsèque qui considère cette variété comme plongée dans un espace euclidien à un nombre suffisant de dimensions. Il est en effet toujours possible de réaliser un ds^2 dans un espace euclidien, mais c'est un espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions dont la géométrie est aussi

abstraite que celle de la variété qu'il contient. Ce qui nous intéresse ici, c'est l'existence de deux points de vue aussi nettement distincts l'un de l'autre que le point de vue intrinsèque et le point de vue de l'insertion ; cette nouvelle dualité nous amène en effet au premier des problèmes que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre : est-il possible de ramener les propriétés induites sur une surface de RIEMANN par l'espace euclidien ambiant, à des propriétés purement intrinsèques de cette variété ?

Le parallélisme sur une variété de Riemann (1).

La question posée est authentiquement mathématique et on peut en voir l'aspect technique dans les exposés de M. CARTAN que nous avons cités plus haut ; elle n'en a pas moins un intérêt philosophique considérable, que M. CARTAN souligne lui-même avec une sobriété de termes qui confère à sa remarque toute la précision d'une affirmation de savant. Le point de vue des propriétés induites est, nous dit-il, « philosophiquement inférieur » au point de vue intrinsèque. Le moindre résultat dans le sens de la réduction de l'extrinsèque à l'intrinsèque tend en effet à inscrire dans la structure d'un être les relations qu'il soutient avec l'espace ambiant et à restaurer ainsi la vision de la monade leibnizienne. Là encore, il semble que les mathématiques offrent un domaine privilégié au mouvement d'une pensée qui tente de rapprocher deux notions logiques opposées.

Nous avons vu page 23 comment dans un espace de RIEMANN défini par un certain ds^2 , deux observateurs voisins peuvent au moyen d'un trièdre trirectangle « repérer les points qui sont dans leur voisinage immédiat, mais ne peuvent sans convention nouvelle repérer l'un par rapport à l'autre leurs trièdres de référence » (2) ; nous avons indiqué également la nécessité où se trouvait la théorie de la relativité de douer les espaces de RIEMANN qu'elle considère, d'une certaine homogénéité pour que les lois de la physique puissent être indépendantes de toute attache à des points particuliers de l'espace. Cette connexion euclidienne des espaces de RIEMANN, c'est M. LEVI-CIVITA qui l'a définie avec sa conception du parallélisme sur une variété quelconque.

(1) Voir pour tout ce paragraphe le premier article de E. CARTAN, cité p. 22.

(2) E. CARTAN, *op. cit.*, p. 297.

Le raccordement des voisinages des différents points n'est plus indéterminé, les morceaux d'espace sont orientés de proche en proche les uns par rapport aux autres, de telle sorte qu'il soit constamment possible de définir le parallélisme de deux vecteurs issus de deux points infiniment voisins. M. CARTAN explique comment ce parallélisme est, dans la théorie de M. LEVI-CIVITA « induit » sur la variété par l'espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions dans lequel elle est plongée. Pour se représenter de façon intuitive comment des propriétés peuvent être induites sur une variété par l'espace ambiant, M. CARTAN envisage tout d'abord une courbe de l'espace euclidien. Cette courbe ne diffère d'une droite que pour un observateur extérieur à elle ; la cinématique d'un mobile sur cette courbe est identique à la cinématique d'un mobile sur une droite. Cette correspondance entre axes de courbe et segments de droite vient de ce qu'il est possible de dérouler la courbe sur une droite qui serait initialement tangente à un point de la courbe. Or les opérations d'enroulement ou de déroulement d'une courbe sur une droite ne sont possibles que par une série de projections successives de la courbe sur la droite, effectuées dans l'espace qui contient l'une et l'autre. Soit maintenant à définir le parallélisme de deux vecteurs tangents à une surface de RIEMANN V_n et issus de deux points infiniment voisins A et A' . M. CARTAN expose (1) le point de vue de M. LEVI-CIVITA en considérant le plan tangent à la surface en A . Ce plan contient le vecteur tangent à V_n issu de A . On peut projeter orthogonalement sur ce plan le vecteur issu du plan infiniment voisin A' , et les deux vecteurs issus de A et de A' seront dits parallèles si la projection du second sur le plan tangent en A est parallèle au sens ordinaire du mot.

(1) E. CARTAN, *op. cit.*, p. 297.

au vecteur issu de A . La connaissance du ds^2 de la surface suffit à déterminer les coordonnées de A' par rapport à A , mais si l'on attache à A et à A' des systèmes locaux de références, les seconds axes subissent une rotation par rapport aux premiers et il est possible de déterminer les angles de cette rotation de telle sorte que les conditions du parallélisme de deux vecteurs infiniment voisins soient constamment satisfaites. Comme dans le cas de la courbe plongée dans l'espace euclidien, les plans extérieurs tangents, les projections et les rotations qu'implique le parallélisme de LEVI-CIVITA n'ont de sens que par rapport à l'espace dans lequel la variété est plongée. M. CARTAN montre dans la suite de son article toute la différence qui sépare ce point de vue de celui de M. WEYL, qui a pu donner du parallélisme une définition purement intrinsèque : dans le cas de deux dimensions, elle se présente sous la forme suivante : Deux directions issues de deux points voisins A et A' sont parallèles si elles font le même angle avec la géodésique (ligne de longueur minimum) qui passe par A et A' (1). Cette définition ne fait appel à aucune opération dans l'espace extérieur et elle aboutit au même résultat que celle de M. LEVI-CIVITA.

Ce résultat est d'autant plus remarquable qu'il n'est pas du tout nécessaire que lorsque le point de vue intrinsèque et le point de vue extrinsèque sont l'un et l'autre possibles, ils aboutissent à conférer une même connexion à une même surface. M. CARTAN a en effet généralisé le point de vue qui est à l'origine des travaux de M. LEVI-CIVITA en cherchant à attribuer à une variété plongée dans un autre espace que l'espace euclidien (l'espace affine, projectif ou conforme) une connexion qui rende le plus simplement compte des relations de cette variété avec l'espace ambiant (2). Soit par

(1) E. CARTAN, *op. cit.*, p. 298.

(2) E. CARTAN, *op. cit.*, p. 316.

exemple une surface plongée dans l'espace conforme (où la notion de plan est remplacée par celle de sphère). Il est possible de considérer une « connexion conforme » induite sur cette surface par l'espace conforme ambiant de la façon suivante : Au lieu des plans tangents en deux points voisins, on envisage les sphères de courbure passant par ces deux points et on raccorde les deux sphères par une sorte de projection orthogonale de l'une sur l'autre. Cette connexion conforme extrinsèque diffère essentiellement de la connexion conforme purement intrinsèque puisque cette dernière identifie tout plan et toute surface à une sphère (1). La réduction de l'extrinsèque à l'intrinsèque se heurte ainsi à des faits qui montrent les limites que rencontre l'élimination de toute référence à un contenant universel, et confère un intérêt d'autant plus grand aux cas surprenants où cette élimination réussit.

Propriétés de structure et propriétés de situation en topologie algébrique.

La dualité du point de vue extrinsèque et du point de vue intrinsèque que nous avons observée à propos de certains problèmes de géométrie différentielle se retrouve en topologie algébrique et y occupe une place tellement importante que les auteurs des traités les plus récents de topologie, MM. SEIFERT et THRELFALL (2), comme MM. ALEXANDROFF et HOFF (3) la mettent au centre de leurs considérations générales relatives à la topologie.

(1) E. CARTAN, *op. cit.*, p. 317.

(2) H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, 1934.

(3) P. ALEXANDROFF und H. HOFF, *Topologie*. Erster Band. Springer 1935.

Les propriétés géométriques qu'étudie la topologie sont celles qui sont conservées par des transformations biunivoques et bicontinues. Deux figures sont dites à cet égard homéomorphes si l'on peut établir une pareille correspondance entre les points de l'une et ceux de l'autre. Il faut alors distinguer deux sortes d'homéomorphies : celles qui sont réalisables par une déformation des deux figures qui les amène à coïncider dans l'espace, et celles qui existent entre les points de deux figures qu'aucune déformation dans l'espace ne peut amener à coïncider. Considérons deux courbes fermées quelconques ; elles sont homéomorphes en ce sens qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de l'une et les points de l'autre. Si elles sont situées dans un même plan, on peut toujours réaliser cette correspondance en amenant par une série de positions intermédiaires l'une des deux courbes à coïncider avec l'autre. Si elles ne sont pas situées dans le même plan il se peut qu'il soit impossible de les amener sans déchirure à coïncider. Soient par exemple le cercle et le

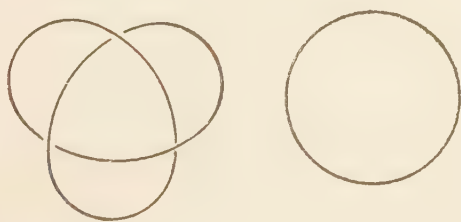


FIG. 1 (d'après la figure 2 de la *Topologie* de SEIFERT et THRELFALL).

nœud en forme de trèfle. Ce sont deux courbes homéomorphes puisqu'on peut établir une correspondance ponctuelle de l'une à l'autre et pourtant il est impossible de les amener à coïncider par une déformation continue dans l'espace. Il existe ainsi pour des figures des propriétés internes (Innere Eigenschaften de SEIFERT et THRELFALL) ou pro-

priétés de structure (Gestaltliche Eigenschaften de ALEXANDROFF et HOPF) comme celle d'être une courbe fermée, et qui sont indépendantes de toute référence à l'espace ambiant, et des propriétés d'insertion ou de situation (Einbettungseigenschaften, Lageeigenschaften) qui sont conférées à une figure par les relations qu'elle soutient avec l'ensemble des autres figures de l'espace. Les résultats que nous allons exposer se rapportent tous à ce problème éminemment leibnizien : Est il possible de déterminer les propriétés de situation par la connaissance des propriétés de structure ? Le terme même d'*Analysis situs* dû à LEIBNIZ exprime bien cet espoir de déterminer ce qui concerne la « situation » par une « analyse » des propriétés internes de la figure.

Il y a, tout au moins dans l'espace à trois dimensions, un cas classique de propriété de situation complètement réductible à une propriété de structure intrinsèque. Considérons ce qu'on appelle l'anneau de MÖBIUS, c'est la figure obtenue

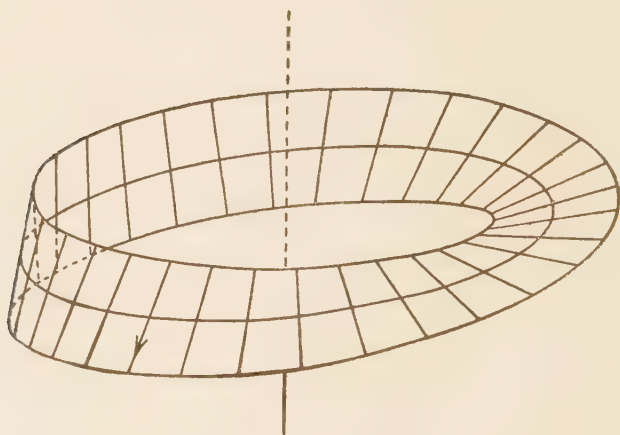


FIG. 2 (d'après la figure 12 de la *Topologie* de SEIFERT et THRELFALL).

en soudant les deux extrémités d'une bande tordue une fois sur elle-même. Si l'on trace une ligne sur cette surface en ne

s'arrêtant que lorsqu'on retrouve le point de départ et si ensuite on fend l'anneau pour le déplier dans sa longueur, on obtient une bande dont les deux côtés sont parcourus par la droite tracée. Si l'on voulait colorier l'anneau de proche en proche, on s'apercevrait en dépliant encore l'anneau dans l'espace que l'on a colorié les deux côtés de la bande obtenue. L'anneau de MÖBIUS n'a donc lui, qu'un seul côté, et c'est là une propriété essentiellement extrinsèque puisque pour s'en rendre compte il faut fendre l'anneau et le détordre, ce qui suppose une rotation autour d'un axe extérieur à la surface de l'anneau. Il est pourtant possible de caractériser cette « unilatéralité » par une propriété purement intrinsèque. Considérons en effet une flèche perpendiculaire à la ligne tracée sur l'anneau et déplaçons cette flèche le long de cette ligne, de telle sorte qu'elle reste constamment située sur la surface. En supposant la surface assez transparente on se rend compte que la flèche arrive en un point à couvrir sa position de départ avec une orientation inverse. La surface est dite non-orientable et cette propriété pourrait être observée par un observateur lié à la surface, qui n'aurait pour cela ni à fendre l'anneau, ni à le détordre. On démontre que dans espace orientable à n dimensions, l'espace euclidien à trois dimensions par exemple, il y a pour une variété à $n-1$ dimensions, un anneau à deux dimensions par exemple, équivalence entre le fait d'être bilatère et le fait d'être orientable ; ou entre le fait d'être unilatère et celui d'être non-orientable. Cette rencontre du point de vue de la situation et du point de vue intrinsèque est, dans ce cas encore, d'autant plus intéressante qu'il n'est pas nécessaire qu'elle ait lieu dans tous les cas. L'orientabilité ou la non-orientabilité étant des propriétés intrinsèques ne peuvent être enlevées à une surface par une modification de ses rapports avec l'espace ambiant, mais il n'en est pas de même du fait d'être bilatère ou unilatère, propriétés qui dépendent de cet espace ambiant. C'est ainsi

qu'une surface orientable est bilatère dans l'espace euclidien mais pourrait cesser de l'être dans un autre espace à trois dimensions.

Cet exemple nous laisse pressentir l'intérêt philosophique de la topologie algébrique (ou encore topologie combinatoire) : Les propriétés géométriques de relation se laissent dans une très large mesure exprimer en propriétés algébriques intrinsèques et dans la mesure où cette intellectualisation des relations d'une figure et des figures environnantes réussit, on voit s'évanouir la distinction kantienne d'une esthétique et d'une analytique. Le succès le plus triomphal de la topologie est à cet égard la théorie de la dualité que nous allons maintenant exposer.

Les théorèmes de dualité.

Si l'on envisage un polyèdre dans l'espace euclidien R^n à n dimensions, les propriétés de situation que l'on est amené à lui attribuer concernent en premier lieu les répercussions qu'entraîne sur la structure globale de l'espace, la présence en lui de l'être géométrique considéré. La structure propre du polyèdre est bien une propriété intrinsèque du polyèdre, indépendante de toutes les situations possibles où il peut se trouver, mais son introduction (1) au sein d'un espace modifie la structure interne de cet espace, en soumet les éléments à de nouvelles connexions et établit ainsi entre l'espace et lui les relations qui caractérisent son mode d'insertion dans l'espace. Les théorèmes de dualité en topologie permettent de déterminer cette action du polyèdre sur l'espace à partir de la seule connaissance structurale du po-

(1) Au lieu d'envisager l'insertion d'un polyèdre dans l'espace, les topologistes considèrent souvent que l'on retire de l'espace les points appartenant à ce polyèdre.

lyèdre ; le polyèdre jouit ainsi de certaines des propriétés de la monade leibnizienne et nous allons essayer de le montrer en ne nous appuyant que sur les définitions indispensables.

L'objet d'étude de la topologie est non pas le polyèdre, mais le complexe simplicial. Voici ce qu'il faut entendre par là : un point est un simplexe à 0 dimension, un segment AB un simplexe à 1 dimension déterminé par les 2 points A et B , un triangle est un simplexe à 2 dimensions ; plus généralement $n + 1$ sommets déterminent un simplexe à n dimensions. Ce simplexe possède des faces à 0, 1, 2... $n - 1$ dimensions obtenues en considérant successivement ses sommets, ses arêtes, ses côtés, etc... Soit maintenant une figure formée d'un ensemble de simplexes satisfaisant aux conditions suivantes : *a*) tout point de la figure appartient au moins à un simplexe ; *b*) tout point n'appartient qu'à un nombre fini de simplexes ; *c*) étant donné deux simplexes, ou bien ils sont sans point commun, ou bien l'un est face de l'autre, ou bien ils ont une face commune ; *d*) les voisinages d'un point dans les différents simplexes auxquels il appartient sont « réunis » en un voisinage unique. Cette figure constitue ce qu'on appelle un complexe simplicial, dont la dimension est celle du simplexe le plus élevé qui apparaît dans la « décomposition simpliciale » du complexe (1) (2). Naturellement on ne distingue pas entre un complexe et les figures qui lui sont topologiquement équivalentes. Ainsi par exemple la surface d'une sphère est un complexe à 2 dimensions dont on obtient une décomposition simpliciale en considérant le tétraèdre $ABCD$ inscrit. Le tétraèdre est un simplexe à 3 dimensions ; les 4 triangles qui le limitent forment un complexe à 2 dimensions topologiquement équivalent à

(1) Voir pour ces définitions les livres déjà cités p. 48, ainsi que la *Topology* de S. LEFSCHETZ.

(2) Au lieu d'une décomposition en simplexes, on envisage parfois une décomposition en cellules, obtenue à partir de la décomposition simpliciale.

la surface de la sphère, où interviennent 4 simplexes à 2 dimensions : les 4 triangles ABC , ABD , BCD , ACD , 6 simplexes à 1 dimension (les 6 arêtes) et 4 simplexes à 0 dimension (les sommets).

On démontre de même que la plupart des figures importantes de la topologie sont des complexes. Toute étude structurale d'un complexe repose sur la connaissance de certains nombres, dits nombres de BETTI, attachés à ce complexe et qui sont invariants par une transformation topologique. Malgré le caractère abstrait de cette théorie il nous faut absolument préciser la nature des êtres géométriques que ces nombres mesurent sur un complexe : on définit sur un complexe de dimension n , certaines combinaisons de simplexes de la dimension 0, de la dimension 1, de la dimension n , qui forment ce qu'on appelle des cycles (1) relatifs à chaque dimension ; on définit ensuite ce qu'on entend par indépendance de plusieurs cycles de même dimension et les nombres de BETTI mesurent pour chaque dimension de 0 à n le nombre maximum de cycles indépendants de cette dimension. Il est possible de donner une représentation in-

(1) Etant donné un simplexe de dimension n , on appelle frontière de ce simplexe la somme algébrique de ses faces à $n - 1$ dimensions. On appelle k -chaîne, une somme algébrique de simplexes de la dimension k , chacun pouvant être éventuellement multiplié par un coefficient entier. On appelle cycle une chaîne fermée, c'est-à-dire une chaîne dont la frontière est nulle. Parmi ces cycles, certains se trouvent être en même temps frontières de chaînes à $k + 1$ dimensions. Ainsi, par exemple, une circonférence est non seulement une chaîne de la dimension 1, mais un cycle puisqu'elle est fermée et même un cycle frontière puisqu'elle est frontière d'un simplexe à 2 dimensions (la surface du cercle, topologiquement équivalente au triangle inscrit). Un cycle frontière est dit homologue à zéro : ces préliminaires étant posés, voici la définition de l'indépendance de cycles : m cycles à k dimensions $u_1^k, u_2^k, \dots, u_m^k$ sont dits indépendants s'il n'existe pas de combinaison linéaire

$$t_1 u_1^k + t_2 u_2^k \dots + t_m u_m^k$$

de ces m cycles qui soit homologue à zéro sans que tous les coefficients t_i s'annulent. Si l'on peut trouver sur un complexe m cycles indépendants et que l'on ne puisse en trouver $m + 1$, le nombre de BETTI de la dimension k est m .

tuitive du sens des nombres de BETTI de la dimension 0 et de la dimension 1. Le nombre de BETTI de la dimension 0 mesure ce qu'on appelle les composantes du complexe, c'est-à-dire le nombre des parties isolées qui le constituent.

Ainsi par exemple l'espace euclidien dont on retire les points situés sur une couronne circulaire a son nombre de BETTI de la dimension 0 égal à 2, car un point de la partie hachurée extérieure et un point de la partie intérieure ne peuvent être reliés par un chemin continu ; ils appartiennent donc à 2 composantes distinctes.

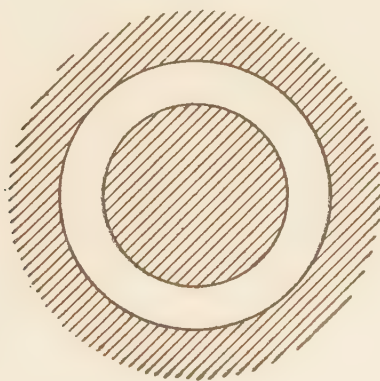


FIG. 3.

Le nombre de BETTI de la dimension 1 mesure le nombre maximum de courbes fermées indépendantes qui ne sont pas réductibles à un point par déformation continue. Soit par exemple le plan euclidien percé de 2 trous. Les bords des trous sont des courbes irréductibles à un point, le nombre de BETTI de la dimension 1 est égal à 2.

Nous pouvons aborder maintenant l'exposé des théorèmes de dualité. Le premier théorème de dualité dû à POINCARÉ se réfère exclusivement à la structure intrinsèque d'un complexe : le théorème de dualité d'ALEXANDER est une conséquence directe du théorème de POINCARÉ, et atteint immédiatement le but auquel nous nous proposons d'arri-

ver : il ramène à l'étude structurale d'un complexe l'étude structurale de l'espace qui reçoit ce complexe ; c'est lui qui opère la réduction des propriétés de situation en propriétés intrinsèques et il nous faut montrer comment il est en germe dans le théorème « interne » de POINCARÉ.

Le théorème de POINCARÉ démontre que pour une multiplicité fermée de dimension n (complexe satisfaisant à certaines conditions) les nombres de BETTI de la dimension k sont égaux aux nombres de BETTI de la dimension $n-k$. Cette symétrie interne entre les nombres de BETTI d'un même complexe Q vient de ce que les nombres de BETTI de

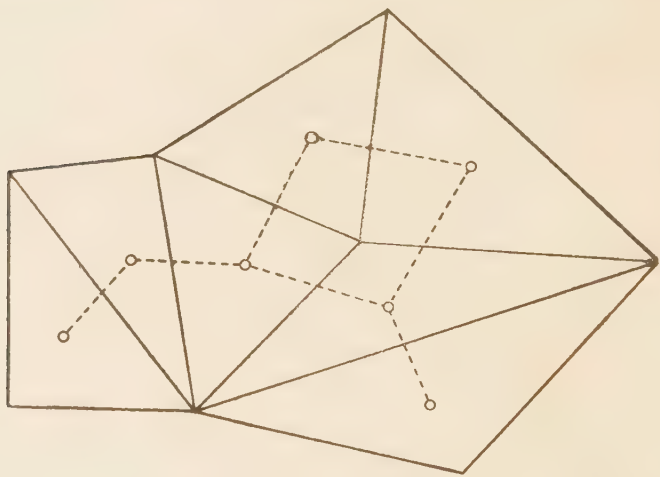


FIG. 4 (d'après la figure 13 de la *Topology* de S. LEFSCHETZ).

la dimension k sont nombres de BETTI de la dimension $n-k$ pour un autre complexe que le premier, son complexe dual. Le complexe dual Q^* d'un complexe Q résulte d'une autre décomposition en cellules des mêmes points que ceux qui figurent dans la première décomposition en cellules de Q (fig. 4). Chacune des cellules à $n-k$ dimensions de Q^* est en intersection avec les cellules à k dimensions du complexe Q . Cette notion du complexe dual est essentielle pour assurer le passage du cas interne au cas externe. Alors que nous

étions partis d'une conception où les nombres de BETTI d'une multiplicité étaient des caractéristiques propres à cette multiplicité, voici que l'être étudié se dédouble et que les nombres de BETTI du nouveau complexe peuvent être déterminés à partir de ceux de l'ancien. Cette dualité au sein d'un même être a donc déjà le sens d'une relation entre deux êtres discernables quoiqu'encore indissolublement liés l'un à l'autre. Un simple changement de perspective les dissociera et transformera une symétrie interne en véritable correspondance de deux êtres distincts.

Considérons en effet un complexe Q à k dimensions plongé dans l'espace euclidien R^n à n dimensions. Soit $R^n - Q$ l'espace complémentaire du complexe Q , c'est-à-dire l'espace dont on enlève les points appartenant à Q . Alors qu'il y avait tout à l'heure dualité entre les nombres de BETTI d'un même complexe, le théorème d'ALEXANDER démontre une nouvelle dualité entre les nombres de BETTI de Q et ceux de son espace complémentaire $R^n - Q$ (1). Soit $p^r(Q)$ le nombre de BETTI de la dimension r du complexe Q ; on a $p^r(Q) = p^{n-r-1}(R^n - Q)$. Le nombre de BETTI de la dimension r de Q est égal au nombre de BETTI de la dimension $n-r-1$ de $R^n - Q$ sauf dans le cas où $r = n-1$ pour lequel on a $p^{n-1}(Q) = p^0(R^n - Q) - 1$. Il nous faut insister sur le sens de ce résultat. Dans l'espace euclidien à n dimensions, tous les nombres de BETTI sont

(1) C'est la notion extrinsèque d'*enlacement* qui permet de rattacher le théorème d'ALEXANDER au théorème de POINCARÉ. On dit qu'il y a *enlacement* entre deux courbes fermées sans points communs s'il y a *intersection* entre le plan compris à l'intérieur d'une de ces courbes et l'autre courbe. Dans le cas qui nous occupe ici, il y a dans R^n enlacement entre les cycles frontières de dimension r appartenant à Q et les cycles frontières de dimension $n-r-1$ appartenant à $R^n - Q$. Cela signifie qu'il y a intersection entre les cycles frontières de la dimension r de Q et certaines chaînes de dimension $n-r$ de $R^n - Q$. On peut alors considérer ces cycles de dimension r et ces chaînes de dimension $n-r$ comme appartenant à des complexes en dualité dans R^n et l'on voit ainsi comment s'opère le passage du cas « interne » au cas « externe ».

nuls sauf celui de la dimension 0 qui est toujours égal à 1 dans les espaces composés d'une seule partie. Ce n'est que parce qu'on introduit dans R^n un complexe Q qu'il en résulte pour l'espace $R^n - Q$ une structure plus compliquée que celle de l'espace primitif. Ainsi dans le cas de la figure,

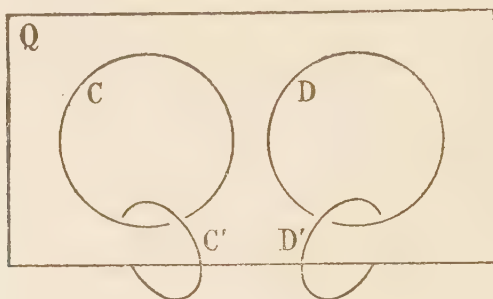


FIG. 5 (d'après la figure 35 de la *Topologie* d'ALEXANDROFF et HOPF.

ce n'est que parce qu'on enlève de R^n l'espace Q percé de deux trous C et D qu'il en résulte pour $R^n - Q$ l'existence de cycles C' et D' , de la dimension 1, *enlacés* avec C et D , et non réductibles à un point par déformation continue. Les nombres de BETTI de $R^n - Q$ qui expriment la structure de cet espace expriment donc par là même la nature de l'action qu'exerce sur R^n le complexe Q et le théorème d'ALEXANDER permet de prévoir à l'avance le résultat de cette action de Q sur R^n par la connaissance de la structure propre de Q . On comprend alors comment MM. ALEXANDROFF et HOPF peuvent écrire (1) : « Le théorème de dualité d'ALEXANDER appartient sans aucun doute aux découvertes les plus importantes de la topologie dans ces dernières années. Tout ce que nous savons des propriétés de situation des polyèdres et des ensembles fermés dans les espaces à plusieurs dimensions se ramène à lui. Les propriétés de situation d'un ensemble F dans un espace R sont

(1) ALEXANDROFF und HOPF, *Topologie*, p. 449.

en premier lieu les propriétés de structure de l'espace complémentaire $R-F$ et le théorème de dualité nous apprend à déterminer ces propriétés, dans le cas d'un polyèdre plongé dans l'espace euclidien, pour autant qu'elles se laissent exprimer par les nombres de BETTI et les groupes de torsion (1). »

Voici le cas le plus simple où s'appliquent ces considérations : le théorème de JORDAN enseigne qu'une courbe fermée dans le plan divise le plan en deux régions séparées dont elle est la frontière commune. Le théorème caractérise manifestement l'action de la courbe sur l'espace. BROUWER et H. LEBESGUE ont montré, bien avant qu'ALEXANDER eût énoncé son théorème général, comment il était possible de rattacher cette action d'une multiplicité fermée à n dimensions sur un espace ambiant à $n + 1$ dimensions, aux propriétés intrinsèques de la multiplicité. Avec la formule d'ALEXANDER, le résultat de JORDAN est immédiat : une courbe fermée C est un complexe à 1 dimension, son nombre de BETTI de la dimension 1, p^1 , est égal à 1. Dans le plan où $n = 2$, on a donc, en appelant $p^0(R^2 - C)$ le nombre de composantes isolées de l'espace dont on enlève les points situés sur la courbe C :

$$p^0(R^2 - C) = p^1(C) + 1 = 2.$$

L'action de la courbe sur l'espace est donc déterminable à partir de la connaissance des invariants de structure de la courbe considérée intrinsèquement. Ce que ce résultat a eu d'extraordinaire lors de sa découverte est mis en lumière par M. PONTRJAGIN dans l'introduction d'un article très important sur les théorèmes de dualité. M. PONTRJAGIN écrit en effet : (2) « Dans son mémoire

(1) Les groupes de torsion sont des invariants de structure déterminés en même temps que les nombres de BETTI.

(2) L. PONTRJAGIN, *Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*. *Math. Ann.*, t. 105 (1931), p. 165 sqq.

célèbre de 1895 sur l'*Analysis situs* paru dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*, POINCARÉ a démontré le théorème de dualité qui porte aujourd'hui son nom et qui établit l'identité du r^{me} et du $n-r^{\text{me}}$ nombre de BETTI d'une multiplicité orientable à n dimensions. A peu près à la même époque, JORDAN énonçait pour la première fois le théorème relatif aux courbes fermées. Personne ne se doutait alors que deux théorèmes aussi totalement différents appartenaient au même cercle d'idées. » Personne ne pouvait en effet se douter, avant le développement de la topologie algébrique, que les propriétés de structure interne découvertes par POINCARÉ expliqueraient un jour les propriétés extrinsèques de situation qu'exprimait le théorème de JORDAN.

Les limitations de la réduction.

Les théorèmes de dualité permettent avons-nous vu page 59 de déterminer les propriétés de structure de l'espace complémentaire d'un polyèdre plongé dans l'espace euclidien par la connaissance de la structure du polyèdre en question « pour autant que ces propriétés se laissent exprimer par les nombres de BETTI et les groupes de torsion ». Or des faits sont venus montrer que cette restriction était essentielle et que la réduction des propriétés de situation aux propriétés de structure ne pourrait jamais être achevée. Il semble qu'il en soit comme si la topologie ne pouvait se développer qu'en donnant raison à LEIBNIZ, mais que constamment elle rencontre des faits qui donnent raison à KANT et l'obligent ainsi à chercher de nouvelles méthodes. La découverte en question est celle de L. ANTOINE (1). M. ANTOINE étudie le cas de deux courbes de JORDAN F et f

(1) L. ANTOINE, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages*. Journ. Math. pures et appliquées (1921), p. 221.

situées chacune dans des espaces F_1 et f_1 et examine dans quelle mesure l'homéomorphie qui existe toujours entre deux courbes de JORDAN peut s'étendre à leur voisinage. Trois cas sont alors possibles : 1^o celui où l'homéomorphie des courbes s'étend à tout l'espace ; 2^o celui où l'homéomorphie s'étend à un voisinage qui dépasse les courbes sans embrasser tout l'espace ; 3^o celui où l'homéomorphie de courbes ne peut être prolongée pour aucune région extérieure aux courbes. Dans le cas de courbes planes on est toujours dans le premier cas et la structure de la courbe détermine complètement la structure de l'espace qui la contient ; par contre pour des courbes de l'espace euclidien à trois dimensions, les trois cas peuvent se présenter et M. ANTOINE construit effectivement un arc de JORDAN sur un tore dont la correspondance avec un segment de droite ne s'étend à aucun voisinage. Les deux courbes F et f étant homéomorphes, leurs invariants de structure déterminent, en vertu du théorème d'ALEXANDER, des invariants de structure identiques pour leurs espaces complémentaires respectifs $F_1 - F$ et $f_1 - f$, mais l'identité de ces invariants n'est pas suffisante pour que les espaces $F_1 - F$ et $f_1 - f$ soient homéomorphes. Ils ne sont pas déterminés de façon univoque par leurs nombres de BETTI, donc par les courbes qui peuvent y être insérées et leurs différences de structure sont irréductibles. Si l'on remarque alors que les deux espaces euclidiens à trois dimensions F_1 et f_1 sont identiques et que c'est l'introduction des courbes homéomorphes F et f dans chacun d'eux qui les rend profondément dissemblables, on se rend compte de tout ce que les invariants de structure des courbes laissent échapper de relations entre la courbe et l'espace. Les propriétés de situation, réductibles aux propriétés de structure dans le cas de deux dimensions, cessent de l'être dans le cas de trois dimensions. A ce niveau de réalité, la distinction d'une esthétique et d'une analytique subsiste.

CHAPITRE III

La montée vers l'absolu.

Il y a dans la métaphysique cartésienne une démarche dialectique essentielle : le passage de l'idée d'imperfection à l'idée de perfection et à Dieu qui est cause de la présence en nous de l'idée de parfait. Nous nous intéresserons surtout à deux étapes de ce passage, telles que nous les trouvons dans la quatrième partie du *Discours de la Méthode*. La première est celle où DESCARTES affirme l'antériorité logique de l'idée de parfait par rapport à l'idée d'imparfait. L'être imparfait ne se comprend que par référence à l'être parfait dont l'existence est ainsi enveloppée dans la sienne propre : « En suite de quoi, nous dit-il, faisant réflexion sur ce que je doutais et que par conséquent mon être n'était pas tout parfait, car je voyais clairement que c'était une plus grande perfection de connaître que de douter, je m'avisai de chercher d'où j'avais appris à penser à quelque chose de plus parfait que je n'étais ; et je connus nécessairement que ce devait être de quelque nature qui fût en effet plus parfaite (1). » M. GILSON rapproche de ce texte un passage de l'entretien avec BURMAN où se trouve énoncée cette règle : « omnis autem defectus et negatio præsupponit eam rem a qua deficit et quam negat (2). » Non seulement l'imper-

(1) Edition Ad. Tannery, t. VI, p. 33.

(2) Ed. Ad. Tann., t. V, p. 153. Cité et commenté par E. GILSON, *Discours de la Méthode. Texte et Commentaire*, p. 315.

fection présuppose la perfection mais, et c'est l'autre point sur lequel nous voulons insister, l'imperfection n'étant qu'une privation, il est possible, par la seule considération de l'être imparfait, de déterminer les attributs de l'être parfait. C'est ce que montre le texte du Discours : « Car suivant les raisonnements que je viens de faire, pour connaître la nature de Dieu autant que la mienne en était capable, je n'avais qu'à considérer de toutes les choses dont je trouvais en moi quelque idée si c'était perfection ou non de les posséder et j'étais assuré qu'aucune de celles qui marquaient quelque imperfection n'était en lui, mais que toutes les autres y étaient (1). » La distance qui sépare la perfection de l'imperfection est donc inscrite dans la nature même de l'être imparfait ; l'esprit s'élève à l'absolu en un mouvement dont les démarches sont commandées par le but que l'on aperçoit dès le point de départ. La structure de l'être imparfait prend alors son véritable sens : sa complication ou son obscurité ne sont que des écarts par rapport à la simplicité transparente de la vision finale ; la montée vers la perfection semble parcourir en sens inverse les étapes d'une dégradation antérieure.

Il est possible de retrouver dans certaines théories de l'algèbre moderne de pareilles relations entre la perfection et l'imperfection ; nous étudierons dans ce chapitre la nécessité de cette référence à un absolu qui se laisse apercevoir dans la nature imparfaite de certains êtres mathématiques, et cette montée vers lui en une série d'étapes dont chacune efface quelque impureté, jusqu'à la dernière où tout défaut est comme racheté. C'est là un mode de pensée bien différent de ceux qui se présentent dans l'arithmétique ordinaire ; l'arithmétique est en effet le domaine de la récurrence à l'infini, tandis que ce qui est caractéristique du mouvement des théories que nous allons considérer, c'est

(1) Ed. Ad. Tann., t. VI, p. 35.

l'existence d'un but conçu à l'avance comme terme de la montée. Dans la théorie du corps de classes, ce but c'est le corps de classes absolu, dans la théorie de l'uniformisation des fonctions algébriques ou analytiques sur une surface de RIEMANN, c'est la surface universelle de recouvrement. L'armature logique de l'une et l'autre de ces deux théories leur vient de la théorie des équations algébriques de GALOIS, aussi quoique plusieurs auteurs (1) en aient déjà exposé l'importance philosophique, croyons-nous devoir montrer à nouveau comment elle contient l'outil mathématique essentiel du passage à l'absolu.

La théorie de Galois (2).

Soit un corps de nombres k , c'est-à-dire un ensemble de nombres quelconques, satisfaisant aux axiomes de l'addition, de la multiplication et de la division, et soit $f(x)$ un polynôme en x , de degré n et à coefficients dans k . Ce polynôme est irréductible dans k si k ne contient aucune de ses racines $\alpha_1 \dots \alpha_n$. Ainsi par exemple le polynôme $x^2 - 2$ est irréductible dans le corps des nombres rationnels puisque ses deux racines $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ n'y sont pas contenues.

Soit K le corps obtenu en ajoutant à k l'une des racines α_1 du polynôme. Cette extension K de k s'écrit $k(\alpha_1)$. Si les n corps conjugués $k(\alpha_1) \dots k(\alpha_n)$ coïncident, le corps unique K ainsi défini contient toutes les racines du polynôme $f(x)$ et est dit galoisien par rapport à k . Le degré de l'extension K sur k est égal au degré n du polynôme irréductible $f(x)$. Le groupe de Galois G du polynôme $f(x)$ est formé des transformations internes (ou automorphismes) du corps K qui lais-

(1) Cf. en particulier : Maximilien WINTER, *La Méthode dans la philosophie des Mathématiques*, p. 146-185.

(2) Cf. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, t. I. Berlin, Springer, 1930.

sont fixes les éléments de k (tous contenus dans K) et permutent entre elles les racines α_i du polynôme proposé. Comme à une racine α_i peuvent correspondre n racines conjuguées $\alpha_1 \dots \alpha_n$, le groupe contient n substitutions ; l'ordre de ce groupe est ainsi égal au degré du sur-corps K .

Ces définitions vont nous permettre de comprendre ce que l'on pourrait appeler « l'imperfection » (1) du corps de base par rapport à un polynôme donné. Cette imperfection réside en ce qu'il est besoin d'une extension de degré n pour passer du corps k au corps K qui contient toutes les racines du polynôme en question et elle est mesurée par l'ordre du groupe de GALOIS attaché à l'équation. Nous allons voir comment en « montant » de k à K , on peut considérer des corps intermédiaires k' tels que $k \subset k' \subset K$ et dont « l'imperfection » diminue à mesure que l'on s'approche de K . Soit en effet k' un pareil sur-corps, tel que K ne soit plus que de degré m par rapport à k' ($m < n$). Le théorème de GALOIS associe de façon univoque à ce corps intermédiaire un sous groupe g' du groupe G , défini de la façon suivante : g' laisse invariants tous les éléments de K qui sont dans k' et ne permute entre eux que ceux qui restent à intégrer. De plus, l'ordre de ce sous-groupe est égal au degré m de l'extension qui doit encore faire passer de k' à K et mesure bien ainsi ce qui demeure d'imperfection en k' . La « montée » de k à k' est donc accompagnée d'une « descente » dans l'ordre des groupes attachés à ces corps, et au corps final K , en lequel toute imperfection a disparu, puisqu'il contient toutes les racines de $f(x)$, correspond le plus petit sous-groupe de G , le groupe unité I qui ne contient que la transformation identique.

L'intérêt du schéma logique de la théorie de GALOIS est considérable. On rencontre bien en algèbre un certain

(1) Il va sans dire que nous employons ici l'expression d'imperfection sans référence aucune au sens algébrique de l'expression de « corps parfait ».

nombre d'autres théorèmes qui affirment, pour un domaine de base imparfait à un certain point de vue, l'existence d'une extension où cette imperfection ait disparu. Ainsi par exemple il existe pour tout corps de nombres, une extension Ω qui est « algébriquement fermée » c'est-à-dire telle que tout polynôme en x à coefficients dans Ω , soit complètement décomposable en facteurs du 1^{er} degré à coefficients dans Ω ; mais le théorème d'achèvement de la théorie de GALOIS est infiniment plus riche. Il associe à chaque étape de la montée de k à K un nombre qui mesure ce qui subsiste d'écart entre l'étape en question et l'étape finale. La prévision du but est encore plus précise lorsque l'équation $f(x) = 0$ est résoluble par radicaux, c'est-à-dire lorsque le corps K qui contient toutes les racines de l'équation proposée peut être construit par adjonctions successives de gran-

deurs $\sqrt[n]{a}$, a appartenant chaque fois au corps déjà obtenu. On peut dans ce cas ordonner de k à K une série croissante de corps $k \subset k' \subset k'' \dots \subset K$ à laquelle correspond terme à terme une série descendante de groupes $G \supset g' \dots \supset I$ telle que cette série ne puisse être allongée par l'adjonction d'aucun élément intercalaire. Les données initiales impliquent alors non seulement l'existence du but et l'écart qui le sépare du corps de base, mais aussi le nombre exact des étapes à accomplir pour arriver à lui. Nous retrouvons bien là les deux moments essentiels du passage à l'absolu dans la méditation cartésienne : Tout d'abord la vision de l'être parfait dont l'existence est impliquée par celle de l'être imparfait, et d'autre part la conscience que la nature des démarches à effectuer pour accéder à l'absolu est, dans une certaine mesure, donnée avec l'être imparfait proposé, dont la structure appelle ainsi un modèle achevé où ses défauts s'effacent.

° C'est en nous plaçant à ce point de vue cartésien ou galoisien que nous allons examiner maintenant la théorie du corps de classes.

La théorie du corps de classes (1).

La théorie du corps de classes issue tout entière du génie d'HILBERT est une théorie d'algèbre extrêmement abstraite et qui fait appel à un grand nombre de notions difficiles à saisir, mais elle s'impose à nous comme un des exemples les plus nets de la mathématique nouvelle où les édifices successifs tendent vers un but que leur mouvement prévoit. Elle présente à nouveau le cas d'une montée de corps en sur-corps jusqu'à un être maximal : le corps de classes absolu qui jouit par rapport à un corps de base initial de la plus grande simplicité dont une extension soit possible. Sa richesse philosophique ne s'épuise du reste pas dans cette montée vers l'absolu, car nous retrouvons en elle cette solidarité de structure entre les éléments d'un tout et le tout auquel ils appartiennent que nous avons décrite au Chapitre I. Les deux problèmes sont même si étroitement liés qu'il est impossible d'exposer séparément l'apport de l'un ou de l'autre.

Les « éléments » d'un « tout » ce sont ici les « idéaux » (2)

(1) Cf. pour cette théorie C. CHEVALLEY, *La théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux*. Thèse de la Faculté des Sciences de Paris et J. HERBRAND, *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques*. Mémoires des Sciences mathématiques, fascicule 75.

(2) Voici les définitions des notions utilisées dans ce paragraphe :

Etant donné un corps de nombres algébriques k , on appelle idéal de ce corps tout ensemble de nombres du corps tel que :

a) Si α fait partie de cet ensemble, il en est de même de $\lambda\alpha$, quel que soit l'entier α ;

b) Si β est un autre élément de cet ensemble, $\alpha + \beta$ en fait aussi partie ;

c) Il y a un entier μ tel que pour tout α de cet ensemble, $\mu\alpha$ soit entier.

Etant donné un ensemble quelconque de nombres du corps, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, l'ensemble des $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots$, les λ_i étant des entiers arbitraires du corps, forme un idéal, l'idéal $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

L'idéal (α) engendré par un seul nombre $\alpha \neq 0$ est dit principal. On peut définir un produit de deux idéaux, et on appelle idéal premier un idéal entier $\mathfrak{a}$ qui ne peut être mis sous la forme $\mathfrak{b} \mathfrak{c}$, où $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont entiers et différents de (1) (HERBRAND, *op. cit.*, chap. I, § V).

d'un corps de nombres algébriques ; ils restent des « idéaux » dans les extensions successives de ce corps, mais leur structure interne varie avec l'extension que l'on considère et exprime à chaque fois une caractéristique globale du corps où ils sont plongés. Si l'un de ces corps peut alors être conçu comme le terme ultime d'une ascension, c'est qu'en lui enfin tous les idéaux du corps de base trouvent la structure interne la plus uniforme et la plus simple. Plus précisément, étant donné un idéal premier d'un corps de base k , cet idéal ne reste pas premier dans une extension K de k . Peut-on, connaissant le degré de l'extension de K par rapport à k , prévoir le mode de décomposition des idéaux premiers le k dans K ? Inversement, connaissant les lois de décomposition des idéaux dans un sur-corps, peut-on caractériser la nature de l'extension envisagée ? Ce sont là deux problèmes réciproques de solidarité entre un tout et ses parties, problèmes comparables aux problèmes de métrisation et de prolongement envisagés p. 31, mais il s'y ajoute un élément nouveau, celui de la montée vers un corps maximal qui rapproche ce problème de la théorie de GALOIS.

HILBERT avait énoncé en 1898, sans démonstration, les principaux théorèmes de la théorie du corps de classes, dans le cas de sur-corps particuliers (sur-corps abéliens non ramifiés). Ces résultats ont été démontrés et étendus à des catégories beaucoup plus générales de sur-corps par FURTWÄNGLER en 1907 et TAKAGI en 1920. Nous nous bornerons ici aux cas simples envisagés par HILBERT et voudrions brièvement mettre en lumière la liaison établie entre l'ensemble des sur-corps, qui *contiennent* le corps k et l'ensemble des groupes d'idéaux qui *sont contenus* dans ce corps.

La définition des groupes d'idéaux d'un corps k peut se faire de la façon suivante : Soit A le groupe de tous les idéaux du corps k et soit S le groupe des idéaux principaux du corps, qui est évidemment un sous-groupe du groupe A . On envisage comme groupes d'idéaux tous les sous-

groupes H de A qui contiennent le groupe S des idéaux principaux. Ces sous-groupes sont ainsi disposés entre un groupe maximal A et un groupe minimal S et ils déterminent chacun une division en classes des idéaux de A ; deux idéaux étant dans la même classe par rapport à H lorsque leur quotient se trouve contenu dans le sous-groupe H considéré.

La notion de « groupes d'idéaux » étant ainsi précisée, HILBERT appelle « corps de classes » pour le groupe d'idéaux H du corps k , un certain sur-corps algébrique K tel que seuls les idéaux premiers de k appartenant à H se décomposent dans K suivant une certaine loi simple qu'il indique (1) ; les autres idéaux se décomposant suivant une loi plus compliquée. FURTWÄNGLER et TAKAGI ont alors démontré les deux théorèmes réciproques qui permettent d'établir une correspondance biunivoque entre les groupes d'idéaux *dans* k et les extensions *sur* k : Pour tout groupe d'idéaux H situé dans k , il existe une extension K de k qui est corps de classes pour H et inversement : Tout corps K qui est relativement abélien sur k est corps de classes pour un certain groupe d'idéaux H situés dans k . Le degré de l'extension K sur k est égal à l'ordre du groupe A/H des classes d'idéaux déterminé par la division en classes que le

(1) Ce qui nous intéresse ici ce n'est pas tant la nature mathématique de cette décomposition que le fait de savoir qu'elle est plus simple pour les idéaux premiers du groupe d'idéaux H que pour les idéaux qui n'appartiennent pas à H . En fait, voici cette loi : Etant donné un idéal $\mathbf{A}$ de K , soit $\mathbf{a}$ l'ensemble des nombres de $\mathbf{A}$ qui sont dans le corps de base k . Considérons les conjugués de $\mathbf{A}$ dans les corps galoisiens conjugués de K . Le produit de tous ces conjugués est appelé la norme de l'idéal $\mathbf{A}$ et si $\mathbf{A}$ est premier dans K on démontre que Norme $\mathbf{A} = \mathbf{a}^f$, f est dit alors le degré relatif de $\mathbf{A}$ par rapport à k . Dans ces conditions, seuls les idéaux premiers de k appartenant à H se décomposent dans K en un produit d'idéaux premiers différents, de degré relatif 1. Si, par contre, $\mathbf{p}$ est un idéal premier de k n'appartenant pas à H , et si $\mathbf{p}^f$ est la plus petite puissance de $\mathbf{p}$ située dans H , $\mathbf{p}$ se décompose dans K en un produit d'idéaux premiers de degré relatif f par rapport à k .

sous-groupe H opère dans le groupe A de tous les idéaux du corps k . De plus, cette correspondance biunivoque de corps et de groupes établit comme la théorie de GALOIS, une liaison entre la montée dans les sur-corps et la descente dans les groupes : On démontre en effet que la relation $K' \supset K''$ entraîne la relation inverse $H' \subset H''$ pour les groupes d'idéaux H' et H'' correspondant à deux corps de classes K' et K'' distincts.

Ces résultats établissent donc tout d'abord une solidarité étroite entre les lois de décomposition dans K des idéaux premiers de k et les caractéristiques globales de l'extension K , mais ils nous donnent également un résultat plus riche : ils nous laissent pressentir l'existence d'un corps de classes absolu qui contient tous les corps de classes pour tous les groupes H d'idéaux de k , et qui n'est contenu dans aucun. Puisqu'il y a en effet un groupe *minimal* dans la série des sous-groupes, le groupe S des idéaux principaux, et qu'à une hiérarchie descendante entre des groupes correspond une hiérarchie ascendante entre les corps correspondants, il y a un corps de classes *maximal*, celui qui correspond au groupe des idéaux principaux. Il se trouve alors que ce corps de classes maximal est tel que tous les idéaux de k y subissent une même modification de structure : ils deviennent tous idéaux principaux. Au fait d'être le dernier, le corps de classes maximal joint donc le fait d'être le plus simple : la montée s'achève à un stade où certaines des différences les plus importantes entre les idéaux du corps de base ont disparu et l'existence de ce stade était impliquée dès la jonction établie entre les groupes d'idéaux et les corps de classes. De la théorie tout entière se dégage le même mouvement cartésien que de la théorie de GALOIS.

La surface universelle de recouvrement.

La théorie que nous allons exposer maintenant a pour nous une importance philosophique beaucoup plus grande que les théories précédentes, car la montée vers l'absolu y a pour conséquence, non seulement de conférer à un être mathématique la plus grande simplicité de structure interne possible, mais de le rendre à même de donner naissance sur lui à d'autres êtres que lui. Toute la seconde partie de cet ouvrage sera consacrée en effet à l'étude de la procession des êtres mathématiques les uns à partir des autres et, comme nous le verrons, ce mouvement n'est possible que si la structure de l'être dont procèdent d'autres êtres a été amenée au préalable à un certain état de perfection. En tant que nous aurons montré comment l'existence d'une variété universelle de recouvrement est impliquée par la structure d'une variété quelconque, la montée vers cette surface maximale est encore un problème relatif à l'achèvement d'une structure interne, à l'élimination des enchevêtrements qu'elle pouvait primitivement présenter, mais en tant que la variété universelle de recouvrement donne immédiatement naissance sur elle à certaines fonctions dont l'existence était impossible sur toutes les surfaces recouvertes par cette variété universelle, le passage à l'absolu confère à la surface un pouvoir de production qu'elle ne possédait pas aux stades antérieurs ; la structure de l'être parfait s'est épanouie en surprenante richesse.

Pour étudier le recouvrement, on peut prendre comme objet d'étude soit le complexe à n dimensions de la topologie combinatoire, tel que nous l'avons défini p. 53, soit la variété à n dimensions de la topologie « ensembliste », définie par les axiomes du voisinage que M. THRELFALL présente de la façon suivante : 1° A tout point P d'un ensemble est

associé un voisinage de points de l'ensemble tel que tout sous-ensemble contenant ce voisinage soit également un voisinage de P ; 2° A chaque voisinage V est associé une correspondance biunivoque entre les points de V et les points d'une hypersphère de l'espace euclidien à n dimensions ; 3° La variété est d'un seul tenant (2 points peuvent toujours y être réunis par un chemin continu). Nous nous bornerons dans la suite aux variétés à deux dimensions, c'est-à-dire aux surfaces (1). Ce que nous considérerons pour une surface donnée comme une imperfection inhérente à sa structure est le fait que cette surface peut ne pas être simplement connexe. Une surface est dite simplement connexe si toute courbe fermée sur cette surface est réductible à un point par déformation continue. Le plan euclidien est simplement connexe, mais la surface du tore ne l'est pas. En rangeant en effet dans la même classe toutes les courbes fermées réductibles l'une à l'autre par déformation continue, on découvre sur la surface du tore au moins deux

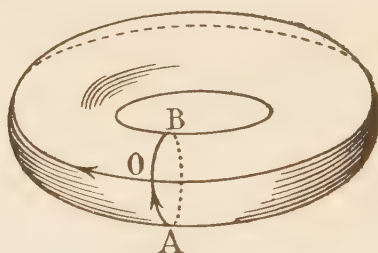


FIG. 6 (d'après la figure 4 de la *Topologie* de SEIFERT et THRELFALL).

classes de courbes fermées qui ne sont pas réductibles à un point : celles qui entourent le « trou » central et celles qui font le tour de la surface comme le cercle AOB (fig. 6).

(1) Voir pour ce chapitre : SEIFERT et THRELFALL, *Topologie*, chap. 7 et 8 ; H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche* ; H. THRELFALL, *La notion de recouvrement. Enseignement mathématique*, année 1935.

L'ensemble des classes de courbes fermées issues d'un point quelconque O d'une surface forme un groupe : le groupe fondamental de la surface, défini par POINCARÉ et dont la structure mesure ainsi en quelque sorte la multiplicité de la connexion interne de la surface.

Nous allons voir maintenant comment il est possible de définir sur une surface multiplément connexe F , toute une série de variétés dont chacune « recouvre » la surface F . Ces variétés s'étagent entre F et une variété universelle de recouvrement qui recouvre toutes les précédentes sans être recouverte par aucune et sur laquelle la multiplicité de connexion de la surface de base s'est complètement effacée.

Ondit qu'une surface $\bar{F}$ recouvre une surface donnée F si (1) 1° à tout point de F correspond au moins un point de $\bar{F}$ qui le recouvre ; 2° s'il existe, pour chacun des points $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ qui recouvrent dans $\bar{F}$ un point P de F des voisinages $V(\bar{P}_1), V(\bar{P}_2), V(\bar{P}_n)$ qui peuvent être représentés topologiquement sur le voisinage $V(P)$ de P dans F ; 3° si Q étant un point du voisinage $V(P)$ d'un point de P sur F , et $\bar{Q}$ un point recouvrant Q dans $\bar{F}$, $\bar{Q}$ appartient à l'un des voisinages $V(\bar{P}_1), V(\bar{P}_2), V(\bar{P}_n)$ qui recouvrent $V(P)$ dans $\bar{F}$. Il existe en général plusieurs surfaces de recouvrement d'une même surface. Elles sont susceptibles de se recouvrir éventuellement les unes les autres et chacune possède comme la surface de base un groupe fondamental qui exprime son degré de connexion. Le théorème essentiel de la théorie établit alors une isomorphie entre les groupes fondamentaux des différentes surfaces de recouvrement d'une surface donnée F et les sous-groupes du groupe fondamental de F . L'ensemble de ces surfaces de recouvrement est ainsi en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-groupes du groupe fondamental. En considérant alors le plus

(1) D'après l'article de M. THRELFALL dans *l'Enseignement mathématique* cité p. 72.

petit sous-groupe du groupe fondamental, c'est-à-dire le groupe unité qui correspond à la classe de chemins réductibles à un point par déformation continue, on obtient le double résultat escompté ; il existe une surface maximale ou universelle de recouvrement qui recouvre toutes les autres surfaces de recouvrement, et cette surface possède un caractère de simplicité absolue puisque son groupe fondamental étant le groupe unité, tout chemin fermé sur elle est réductible à un point. Cette surface universelle est donc, seule de toutes les surfaces qui recouvrent la surface initiale, simplement connexe. On peut la caractériser de la façon suivante : A un point donné P de la surface initiale F , correspondent autant de points conjugués $P_1, P_2 \dots$ sur la surface de recouvrement $\bar{F}$ qu'il existe sur F de contours fermés issus de P , non réductibles les uns aux autres. En somme chaque point de la surface multiplement connexe n'était unique qu'en apparence, il possédait une complexité cachée, qui se traduisait par le degré de connexion de la surface et en dissociant tous les points confondus pour les éparpiller séparément sur la surface de recouvrement, on restitue à la surface la simplicité idéale des surfaces parfaites. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment en restituant à la surface sa simplicité on lui restitue en même temps sa fécondité.

L'uniformisation des fonctions algébriques sur une surface de Reimann.

Le problème de l'uniformisation des fonctions analytiques (nous ne nous occuperons que des fonctions analytiques algébriques) (1) est en lui-même un problème dont la signi-

(1) Une fonction algébrique $\zeta = f(x)$ est une fonction qui satisfait à une équation algébrique du type : $g_0(z)\zeta^n + g_1(z)\zeta^{n-1} + \dots g_n(z) = 0$.

fication logique est comparable à celles des problèmes précédents : Il s'agit encore d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans les enchevêtrements même de leur structure. Une fonction algébrique $\zeta = f(z)$ est dite multiforme autour d'un point de ramification algébrique d'ordre m , si lorsque la variable tourne autour de ce point, la fonction peut prendre successivement m valeurs différentes avant de retrouver la première de ces valeurs. On dit alors que m branches de la fonction viennent aboutir en ce point. Une fonction uniforme au contraire ne peut prendre qu'une valeur en un point. Le problème de l'uniformisation consiste alors à trouver un paramètre complexe t tel que ζ et z se laissent exprimer comme fonctions uniformes $\zeta = \varphi(t)$ et $z = \psi(t)$ de la nouvelle variable t . Le passage de l'ancienne à la nouvelle variable a donc pour conséquence de faire disparaître les points de ramification de la fonction algébrique, et nous allons montrer, en exposant la théorie des surfaces de RIEMANN des fonctions algébriques, comment les possibilités de résolution du problème de l'uniformisation sont liées au fait que ces surfaces de RIEMANN contiennent en elles les éléments de la construction d'une surface universelle de recouvrement.

Si l'on prend comme domaine d'existence de la fonction $\zeta = f(z)$, le plan complexe z lui-même, nous avons dit que la fonction pouvait alors se ramifier en plusieurs branches autour de certains points : ainsi la fonction elliptique $\zeta = \sqrt{A_0 z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4}$ se divise autour de chacune des 4 racines supposées distinctes du polynôme sous le radical, en 2 branches distinctes. Au lieu d'admettre ainsi que des branches distinctes de ζ aboutissent en un même point du plan complexe, RIEMANN imagine une surface composée de feuilletts différents du plan complexe, soudés en croix le long des coupures unissant deux à deux

les points de ramification. (Dans le cas de la fonction elliptique que nous venons de considérer, la surface de RIEMANN est composée de deux feuillets soudés en croix le long de 2 coupures unissant deux à deux les 4 points de ramification). On obtient ainsi, d'une façon générale, la surface de RIEMANN de la fonction algébrique considérée. Cette surface est du point de vue de sa structure infiniment plus compliquée que le plan complexe primitif ; les coupures dont elle est entaillée, la soudure en croix des bords de chaque coupure font qu'elle n'est pas simplement connexe ; il est possible en effet de tracer sur cette surface des courbes fermées, appelées rétrosections, dont aucune ne divise la surface en deux régions telles que pour passer de l'une à l'autre, il faille rencontrer la courbe, et qui sont irréductibles à un point par déformation continue. Ces complications topologiques des surfaces de RIEMANN sont compensées par le fait que le comportement de la fonction algébrique sur cette surface est beaucoup plus voisin de l'uniformisation que sur le plan complexe. S'il n'existe pas encore de fonction uniformisante globale, il existe déjà en chaque point de cette surface une « uniformisante locale ».

Soit par exemple la fonction $\zeta = \sqrt[m]{z}$. La surface de RIEMANN de cette fonction possède au point complexe $z = 0$, m feuillets superposés raccordés de façon à établir une permutation circulaire des m valeurs de la fonction à l'origine. Si nous posons $t^m = z$, on a $\zeta = t$, il y a correspondance ponctuelle biunivoque entre les m feuillets de la surface soudés ensemble au point $z = 0$ et m portions séparées du plan complexe simple de la variable t , au voisinage du point $t = 0$. La variable t uniformise ainsi la fonction ζ , au voisinage de l'origine. On peut même définir la surface de RIEMANN comme le fait M. HERMANN WEYL dans son livre : *Die Idee der Riemannschen Fläche*, sans procéder à cette superposition compliquée de feuillets et en ne faisant appel

qu'à l'existence, au voisinage de chaque point p_0 , d'une uniformisante locale $t(p)$, telle que si $f(p)$ est une fonction analytique régulière ou ramifiée au voisinage de p_0 , on puisse représenter $f(p)$ sous forme d'une série de puissances en $t(p)$:

$$f(p) = a_0 + a_1 t(p) + a_2 [t(p)]^2 + \dots$$

La surface de RIEMANN ainsi constituée (1) par une juxtaposition de voisinages où sont définies des uniformisantes locales, paraît à M. WEYL comparable à ces multiplicités à n dimensions de la géométrie différentielle riemannienne, définies par la valeur de leur ds^2 au voisinage infinitésimal de chaque point. Cette comparaison n'est possible que grâce à la définition nouvelle de la surface de RIEMANN proposée par M. WEYL, qui reconnaît (2) du reste lui-même, que rien dans les écrits de RIEMANN ne laisse supposer que RIEMANN ait établi de rapprochement entre les espaces qu'il introduisait en géométrie et les surfaces qu'il introduisait en analyse. On peut même voir à bon droit une différence essentielle entre les espaces de RIEMANN et les surfaces de RIEMANN. Les espaces définis par leur ds^2 sont explorés de façon purement locale, et nous avons indiqué de quelle richesse de connexions leurs éléments restaient susceptibles. La caractéristique principale de la surface de RIEMANN d'une fonction algébrique est, au contraire, de posséder cette structure topologique globale que lui confèrent les coupures et les rétrosections dont nous parlons plus haut et dont la considération est essentielle pour le problème de l'uniformisation. Il est possible du reste de se représenter de façon intuitive cette structure de la surface de RIEMANN d'une fonction algébrique. On démontre en effet qu'une pareille surface peut toujours, par déformation continue, prendre la forme de la surface à deux côtés d'un disque percé de trous. Si le disque

(1) H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, p. 36.

(2) H. WEYL, *op. cit.*, p. 36.

comporte p trous, il y a $2p$ rétrosections indépendantes possibles, c'est-à-dire $2p$ courbes fermées, irréductibles l'une à l'autre par déformation continue et dont aucune ne divise la surface en deux régions distinctes. Considérons par exemple le cas où $p = 2$. A chacun des deux trous correspond un couple de rétrosections Q et Q' pour le premier, R et R' pour le second. Il est facile de voir que la surface (lorsqu'on n'en découpe pas les rétrosections), n'est pas simplement connexe et possède en chaque point un groupe fondamental au sens défini page 73. Joignons en effet un

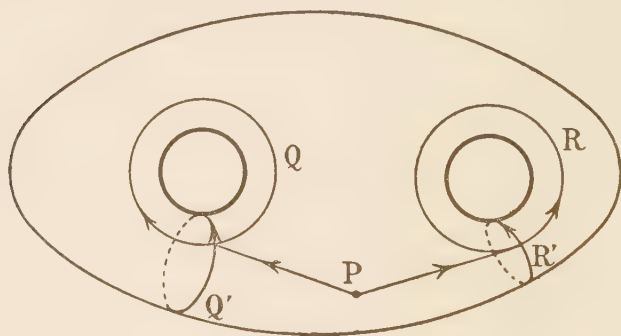


FIG. 7.

point quelconque P au point commun de 2 rétrosections conjuguées. On obtient déjà quatre classes de chemins fermés issus d'un même point et irréductibles les uns aux autres. Ces classes engendrent le groupe fondamental de la surface. Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'on possède ainsi tous les éléments nécessaires à la démonstration de l'existence sur cette surface de RIEMANN d'une uniformisante globale.

Nous allons aborder pour cela les considérations que nous avons annoncées au début de ce paragraphe. Il existe une liaison étroite entre le fait pour une surface d'être simplement connexe et le fait de donner naissance sur elle à une

fonction qui assure la représentation conforme (1) de cette surface soit sur la totalité de la sphère complexe, soit sur cette sphère à laquelle on enlève un point, soit sur le cercle unité du plan complexe. C'est là un théorème d'une importance mathématique considérable, tant par la difficulté des moyens que RIEMANN, POINCARÉ, HILBERT, KÆBE et bien d'autres durent mettre en œuvre pour le démontrer que par l'immensité des horizons nouveaux qu'il a permis de découvrir. Soient p_0 un point quelconque de la surface simplement connexe, t_0 le point correspondant du plan complexe, la fonction qui assure la représentation conforme de la surface sur le plan a la valeur t_0 pour la valeur p_0 de sa variable et il existe une fonction inverse qui prenant la valeur p_0 sur la surface pour la valeur t_0 de sa variable assure ainsi la représentation réciproque du plan sur la surface simplement connexe. Le problème de l'uniformisation est donc résolu pour une surface simplement connexe. Le théorème de la représentation conforme fournit en effet cette fonction $t(p)$ dont l'inverse $p(t)$ est une fonction uniforme sur le plan complexe t . De plus, toute fonction $f(p)$ sur la surface simplement connexe est également fonction uniforme de t . La nouvelle variable est donc bien une uniformisante globale au sens défini p. 75.

Lorsque la surface de RIEMANN de la fonction algébrique considérée n'est pas simplement connexe, l'idée géniale de POINCARÉ et de KÆBE a été de considérer la surface universelle de recouvrement de cette surface. Comme cette surface est, elle, simplement connexe, le théorème de la représentation conforme lui est applicable et elle donne naissance à une uniformisante globale de la fonction $f(p)$

(1) Rappelons qu'une correspondance conforme entre deux domaines est une représentation bicontinue et biunivoque des deux domaines l'un sur l'autre et qui est telle que toute fonction analytique et régulière en un point d'un domaine soit transformée en une fonction analytique et régulière au point correspondant.

attachée à la surface de RIEMANN primitive ; ce qui résout complètement le problème.

Nous arrivons donc au terme de cette étude sur l'uniformisation des fonctions algébriques à un double résultat : la surface universelle de recouvrement se présente tout d'abord avec un caractère de perfection par rapport à la surface de RIEMANN primitive parce que la montée vers elle a fait disparaître les ramifications de la fonction algébrique considérée, mais ce n'est là encore qu'une perfection interne qui résulte de ce qu'une structure plus simple se laissait voir dans le dessin de la structure primitive ; une autre perfection se manifeste qui n'est plus seulement d'achèvement intérieur, mais de puissance créatrice, c'est ce privilège qu'ont certains domaines de faire naître sur eux un monde nouveau de fonctions et d'intégrales dont nous nous occuperons dans la seconde partie de cet ouvrage.

Les études que nous venons de poursuivre au cours de ces trois chapitres nous montrent ainsi la variété des liaisons logiques qui se manifestent au sein des mathématiques. La solidarité du tout et de ses parties, la réduction des propriétés de relation en propriétés intrinsèques, le passage de l'imperfection à l'absolu, voilà autant d'essais d'organisation structurale qui confèrent aux êtres mathématiques un mouvement vers l'achèvement par quoi on peut dire qu'ils existent. Mais cette existence ne se manifeste pas seulement en ce que la structure de ces êtres imite les structures idéales auxquelles ils se laissent comparer ; il se trouve que l'achèvement d'un être soit en même temps genèse d'autres êtres, et ce sont là des relations logiques entre l'essence et l'existence où s'inscrit le schéma de créations nouvelles.

DEUXIÈME PARTIE
LES SCHÉMAS DE GENÈSE

CHAPITRE IV

Essence et existence.

Les problèmes de la logique mathématique (I).

Les problèmes du passage de l'essence à l'existence, qui vont nous occuper désormais jusqu'à la fin de cet ouvrage, s'apparentent à des questions soulevées depuis longtemps par le développement de la logique mathématique. Il ne nous semble pas cependant que la logique jouisse à cet égard d'un privilège spécial ; elle n'est en effet qu'une discipline mathématique parmi les autres, et les genèses qui s'y manifestent sont comparables à celles que nous observerons ailleurs. L'exposé que nous allons faire de ce que l'on pourrait appeler la métaphysique de la logique a donc surtout pour nous la valeur d'une introduction à une théorie générale des liaisons qui unissent les considérations structurales aux affirmations d'existence.

On peut distinguer deux périodes dans la logique mathématique : l'une, la période naïve, va des premiers travaux de RUSSELL jusqu'en 1929, date des travaux métamathématiques d'HERBRAND et de GÖDEL, qui marquent le début de ce qu'on pourrait appeler la période critique. La première période est celle où s'opposent le formalisme

(1) Cf. pour tout ce paragraphe : J. CAVAILLÈS, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques.*

et l'intuitionisme en des discussions qui prolongent celles qu'avait soulevées la théorie des ensembles de CANTOR. Les partisans de l'infini actuel réclament le droit d'identifier pour un même être mathématique, l'essence de cet être telle qu'elle résulte de sa définition implicite par un système d'axiomes non-contradictaires, avec l'existence de cet être. On connaît en revanche l'attitude qu'adoptent à l'égard d'un être dont la construction exigerait un nombre infini de démarches, ou d'un théorème impossible à vérifier, ceux que POINCARÉ appelle les pragmatistes : le célèbre mathématicien nous dit dans ses *Dernières pensées* qu'ils n'y voient « que de la bouillie pour les chats » (1). POINCARÉ s'appuie le plus souvent sur l'affirmation d'existence contenue dans le théorème de ZERMELO : « il existe une manière de bien ordonner le continu », pour montrer comment cet énoncé ne pourrait avoir de sens que si la manière dont il faut procéder pour bien ordonner le continu était réellement connue. Affirmer la possibilité d'une opération irréalisable, c'est affirmer quelque chose qui est soit dénué de sens, soit faux, soit tout au moins indémontré.

Dans son mémoire sur l'Infini (2), HILBERT a justifié l'introduction d'éléments transfinis en mathématiques en les rapprochant des éléments idéaux introduits par KUMMER en algèbre, et dont nous avons parlé au Chapitre III. Les nombres idéaux ne font pas plus partie des nombres d'un corps que les éléments transfinis de la mathématique axiomatisée ne sont déterminables en un nombre fini d'étapes. Mais de même que la considération des nombres idéaux est indispensable pour généraliser le théorème de la décomposition en facteurs premiers, la considération d'éléments transfinis est nécessaire pour généraliser l'application du tiers exclu. Vouloir les éliminer impliquerait l'abandon de la

(1) H. POINCARÉ, *Dernières pensées*, p. 146.

(2) HILBERT, *Über das Unendliche. Math. Ann.* Bd 95 (1926).

règle des contradictoires en logique. Voici comment dans un mémoire de 1923 est présentée la liaison de l'axiome de choix transfini et du tiers exclu pour les ensembles infinis. L'axiome introduit est le suivant :

$$A(\tau A) \rightarrow A(a).$$

L'objet τA est un objet tel que si la propriété A lui convient, alors elle convient certainement à tous les objets a . Il faut concevoir pour cela l'objet τA comme celui auquel il y a le moins de chance que s'applique la propriété A . Ainsi par exemple si A est la propriété d'être corruptible, τA est le plus incorruptible des hommes (1). Il est alors évident que si cet homme idéal (à tous les sens du mot) est lui aussi corruptible, tous les hommes le seront. HILBERT et BERNAYS ont démontré qu'il était possible de déduire de l'axiome transfini l'axiome du tiers exclu :

$$(\bar{a}) A(a) \rightarrow (Ea) \bar{A}(a).$$

(Si tous les a ne possèdent pas la propriété A , il existe au moins un a qui ne la possède pas.)

L'objet τA distingué dans l'ensemble des êtres qui jouissent de la propriété A n'est évidemment pas susceptible d'être construit en un nombre fini d'étapes, puisqu'il est défini par comparaison avec l'infinité des êtres de l'ensemble ; il n'en est pas moins vrai que l'admission de l'axiome où il est défini formellement est équivalente à l'utilisation du tiers exclu. Si donc il est possible de démontrer la non-contradiction d'un système d'axiomes contenant l'axiome du transfini, il est au même titre légitime et avantageux de parler de l'existence de l'objet τA que de l'existence du point à l'infini en géométrie, des nombres imaginaires ou des éléments idéaux d'un corps de nombres. On peut

(1) HILBERT, *Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann.*, t. 88 (1923), p. 151-168, reproduit dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 178 sqq.

donc dire qu'en 1926 les problèmes de la logique mathématique se posaient encore dans les mêmes termes que les discussions du début du siècle, relatives à l'existence du transfini. Fidèle en cela à ses origines leibniziennes, le formalisme considérerait toujours que le passage de l'essence à l'existence devait consister uniquement dans la démonstration de la « compossibilité » des essences, de la non-contradiction des axiomes qui les définissent.

C'est précisément dans les recherches de la période critique relatives à la non-contradiction de l'arithmétique, qu'il nous semble voir s'affirmer une théorie des rapports de l'essence et de l'existence aussi différente du logicisme des formalistes que du constructivisme intuitioniste. Nous allons tout d'abord rappeler les traits principaux de cette évolution interne de la logique et essaierons ensuite d'en dégager une philosophie des genèses mathématiques, dont la portée dépasse de beaucoup le domaine de la logique. L'ouvrage considérable que M. BERNAYS a écrit sur la logique hilbertienne est à cet égard pour nous une source d'une inépuisable richesse (1).

Nous avons déjà indiqué p. 11, comment HILBERT avait conçu la nécessité d'une métamathématique dont l'objet serait de démontrer la non-contradiction et l'achèvement des systèmes d'axiomes de la mathématique formalisée. Les recherches de métamathématique ont été entreprises à deux points de vue différents, et la liaison des deux méthodes est à nos yeux un fait essentiel : l'une de ces méthodes emploie les procédés extensifs de la théorie des ensembles, l'autre, plus conforme aux directives données par HILBERT, lui-même constitue ce qu'HILBERT appelle la « théorie de la démonstration » (2). Du point de vue de la théorie de la

(1) Voir pour toute cette partie D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, ainsi que Paul BERNAYS, *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik*, dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 196 sqq.

(2) Nous traduirons « beweistheoretische Methode » par méthode structurale et « mengentheoretische Methode » par méthode extensive.

démonstration, une théorie mathématique contient, comme actuellement donné avec le système d'axiomes initiaux, l'ensemble des propositions qui peuvent être obtenues à partir de ces axiomes par application des règles de substitution et de passage, ainsi que du « schéma concluant » : $S \xrightarrow{T} T$.

Dans ces conditions, démontrer la non-contradiction d'un système d'axiomes revient à démontrer la compatibilité de l'ensemble de ses conséquences ; c'est obtenir la certitude qu'il n'est pas possible de rencontrer dans cet ensemble la proposition contradictoire : $p \cdot \bar{p}$ (p et non p). De même le système est dit achevé si toute proposition de la théorie est soit démontrable, soit réfutable (par la démonstration de sa négation), c'est-à-dire si l'on sait toujours laquelle des deux propositions p ou $\bar{p}$ est démontrable. On appelle les propriétés de « non-contradictoire » et d'« achevé » pour un système d'axiomes, de « démontrable », « réfutable », « irréfutable » pour les propositions d'une théorie, des propriétés structurales (I) parce que leur attribution à un système ou à une proposition exige une étude interne de l'ensemble des conséquences du système considéré.

Nous allons définir maintenant la deuxième méthode d'étude métamathématique d'une théorie formalisée, la méthode « extensive », celle qui adjoint aux systèmes d'axiomes étudiés, la considération des champs d'individus susceptibles de servir de valeurs aux arguments des fonctions logiques d'une formule de la théorie. Il existe certaines notions métamathématiques qui ne peuvent être définies que dans la méthode extensive ; les principales sont celles de « valabilité universelle » (Allgemeingültigkeit), et de « possibilité de réalisation » (Erfüllbarkeit) (2). Une formule est dite universellement valable si, quelle que soit la manière dont

(1) Cf. R. CARNAP, *Die logische Syntax der Sprache* ; *passim*.

(2) D. HILBERT und P. BERNAYS, *op. cit.*, p. 8 et 128.

on y substitue des prédicats aux variables représentant des fonctions logiques et quel que soit le champ d'individus substitués aux variables arguments, on obtient toujours une proposition vraie ; une formule est dite réalisable s'il existe au moins un champ d'individus et un mode de pareilles substitutions capables de faire de la formule une proposition vraie. Ainsi par exemple la formule :

$$(x)P(x, x) \rightarrow (x)(Ey)P(x, y)$$

est universellement valable. Quels que soient la relation P et le champ considéré, pour tout x de ce champ tel que la relation P ait lieu de cet objet à cet objet, il y a toujours au moins un objet y tel que la relation P ait lieu de l'objet x à l'objet y , ce dernier pouvant n'être autre que x lui-même. Par contre soit le système des trois axiomes suivants (1) :

$$\begin{aligned} & \overline{(x)R(x, x)} \\ (x)(y)(z) \quad & R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z) \\ (x)(Ey) \quad & R(x, y). \end{aligned}$$

Supposons que R signifie « être plus petit que » ; le premier axiome exige que la relation de « plus petit » n'ait pas lieu d'un individu à cet individu lui-même, le deuxième qu'elle soit transitive, le troisième qu'il y ait toujours pour tout x au moins un y tel que $x < y$. Il est impossible de vérifier ce système dans un champ fini, car le troisième axiome ne peut y être vérifié, le dernier nombre d'une collection finie n'étant plus petit qu'aucun nombre. Le système n'est donc réalisable que dans un champ infini. Les propriétés de valabilité universelle et de possibilité de réalisation sont en dualité : une proposition n'est universellement valable que si sa négation n'est pas réalisable et en supposant admis le tiers exclu, une formule n'est réalisable que si sa négation n'est pas universellement valable.

(1) HILBERT und BERNAYS, *op. cit.*, p. 14.

La conception structurale et la conception extensive étant ainsi définies, nous allons maintenant exposer l'importance du passage que la logique mathématique moderne opère de l'une à l'autre.

Considérons tout d'abord les liens qui existent entre la notion structurale de non-contradiction et la notion extensive de « réalisation dans un champ donné ». Lorsque le champ donné ne contient qu'un nombre fini d'individus, on peut, en essayant toutes les combinaisons possibles, trancher la question (*entscheiden*) de savoir s'il existe un choix de valeurs des variables permettant de vérifier la proposition obtenue par la conjonction de tous les axiomes du système proposé. On dit alors que ce choix réalise le système d'axiomes et l'on démontre facilement en s'appuyant sur le principe du tiers exclu dans le fini, que si une conjonction d'axiomes est ainsi réalisable, sa négation n'est pas démontrable. Cette dernière propriété n'est autre que la non-contradiction du système. Il y a donc équivalence dans le fini entre la *structure* non-contradictoire d'un système d'axiomes et l'*existence* d'un champ comprenant un nombre d'individus déterminé et tel que le système soit réalisable dans ce champ (1). Ce résultat si simple qu'il en paraît presque évident contient en germe toute une théorie nouvelle des rapports de l'essence et de l'existence. Ces deux notions cessent en effet d'être relatives aux mêmes êtres mathématiques. Il ne s'agit plus de savoir si la définition entraîne l'existence, mais de chercher si la structure d'un système d'axiomes peut donner naissance à un champ d'individus qui soutiennent entre eux les relations définies par les axiomes. L'essence envisagée est bien celle du système d'axiomes, mais ce dont l'étude interne de ce système permet d'affirmer l'existence, ce sont les « interprétations » du système, les champs où ils se réalisent.

(1) HILBERT und BERNAYS, *op. cit.*, p. 17.

Lorsque le système d'axiomes ne pourrait être réalisé que dans un champ infini d'individus, il n'y a plus forcément équivalence entre la non-contradiction du système et l'existence d'une interprétation de ce système. Le principe du tiers exclu ne s'applique pas nécessairement sous la forme étroite qu'il prend dans le cas de champs finis et la conjonction des axiomes d'un système peut être irréfutable, donc le système non-contradictoire, sans qu'il existe en fait une interprétation des axiomes du système. En somme, la possibilité de réalisation est une exigence plus forte que la non-contradiction ; une dissociation s'établit entre le point de vue extensif et le point de vue structural ; le problème de la réalisation doit laisser place, pour M. BERNAYS, à une recherche purement interne de l'irréfutabilité. C'est ce que M. BERNAYS appelle la conception négative de la non-contradiction. M. BERNAYS a en ce sens démontré (1) que pour le calcul des prédicats il y avait rigoureusement équivalence entre la non-contradiction et l'irréfutabilité de la conjonction des axiomes, sans que cela implique le moins du monde l'existence d'une interprétation du système.

Les faits montrent qu'il est néanmoins difficile de développer une théorie purement structurale de la non-contradiction. A cet égard la tentative la plus authentiquement structurale de démonstration de non-contradiction de l'arithmétique est celle de M. GENTZEN (2). Nous ne nous proposons pas de l'exposer ici en détail, renvoyant pour cela à la thèse de M. CAVAILLÈS ; nous voudrions seulement en rappeler un élément essentiel. Loin de chercher comme dans les méthodes extensives à réaliser les axiomes de l'arithmétique, M. GENTZEN reste fidèle à la conception de la théorie de la démonstration d'HILBERT et se propose de suivre chacune

(1) HILBERT und BERNAYS, *op. cit.*, p. 156.

(2) G. GENTZEN, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. *Math. Ann.*, t. 112, p. 493 sqq.

des opérations qui interviennent dans une démonstration, pour démontrer qu'à aucun moment n'a pu se glisser une proposition contradictoire quelconque. M. GENTZEN entreprend pour cela, comme l'avait du reste déjà essayé HERBRAND, de réduire chacune des opérations d'une démonstration à des opérations de plus en plus simples jusqu'à ce que la formule finale de la démonstration ait été mise sous la forme d'une expression évidemment vraie. Pour cela, M. GENTZEN coordonne à chaque démonstration un nombre ordinal et démontre un théorème essentiel qui revient à peu près à ceci : les réductions aboutissent parce que l'ensemble de ces nombres ordinaux est « bien ordonné » au sens de la théorie des ensembles. La démonstration ne repose donc pas sur l'existence d'une interprétation du système, elle n'en recourt pas moins à la considération d'un ensemble de nombres dont l'existence est équivalente à l'achèvement de la démonstration de non-contradiction. Quelles qu'aient été les intentions de l'auteur, le point de vue extensif reparaît associé au point de vue structural. La structure d'une théorie s'exprime de nouveau par l'existence d'autres êtres que celle des éléments de la théorie.

Ces considérations s'imposent de façon encore plus manifeste quand on passe de l'étude de la non-contradiction à celle de l'achèvement d'un système d'axiomes. Au sens purement structural d'HILBERT, l'achèvement d'un système est équivalent au fait que toute formule de la théorie possède, avons-nous vu, soit la propriété de démontrable, soit la propriété de réfutable. En ce qui concerne le calcul des prédicats, M. GÖDEL a démontré (1) un théorème d'achèvement qui a immédiatement des répercussions extensives. Il a en effet établi que toute formule du calcul des prédicats est soit réfutable, soit réalisable dans le domaine des nom-

(1) K. GÖDEL, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. für Math. und Physik*, t. 37.

bres entiers ; il y a donc pour le système d'axiomes envisagé équivalence entre la propriété structurale d'irréfutabilité et la propriété extensive de réalisation ; en fait, nous dit M. BERNAYS, on peut extraire de la démonstration de GÖDEL, un théorème d'achèvement finitiste d'après lequel il existe toujours pour une formule irréfutable une réalisation formelle dans le cadre de l'arithmétique (en y comprenant le tiers exclu). Inversement, le théorème d'HERBRAND permet de déduire l'irréfutabilité d'une proposition à partir de l'existence d'un champ d'individus qui réalise cette proposition. Les champs qu'envisage HERBRAND ne réalisent pas à vrai dire une formule logique comme des valeurs numériques réalisent une valeur algébrique ; ils ne contiennent pas non plus les valeurs possibles des arguments et des fonctions logiques au sens général défini page 88. Nous verrons cependant au chapitre suivant comment il est possible de les considérer néanmoins à un certain point de vue comme des interprétations du système d'axiomes ; en tout cas, ils sont construits de façon rigoureusement intuitioniste, ils possèdent une nature propre de champs, foncièrement hétérogène à la nature des propositions du système d'axiomes, et l'intérêt qu'ils présentent pour nous résulte de ce que leur existence est liée de façon étroite à la structure interne du système auquel ils sont associés. Le théorème d'HERBRAND se laisse en effet résumer de la façon suivante (1) : l'existence « en extension » d'un champ infini où $\bar{P}$ est réalisable est équivalente au fait structural que P ne fait pas partie de l'ensemble des propositions démontrables de la théorie. Comme dans l'étude de la non-contradiction, nous rencontrons au seuil de la théorie de l'achèvement, des théorèmes qui identifient les propriétés structurales d'un système d'axiomes à l'existence d'un champ où les propositions du

(1) Voir HERBRAND, *Recherches sur la théorie de la démonstration*. Thèse, Paris 1930, p. 118 et surtout : *Sur la non-contradiction de l'arithmétique*, *Journal für die reine und angew. Mathematik*, Bd 166, p. 3.

système se réalisent. La liaison est en ce sens compliquée du fait que les propriétés structurales de P s'expriment en propriétés extensives de $\bar{P}$ et inversement ; elle ne nous en apparaît pas moins comme le premier schéma de toutes les expansions mathématiques que nous décrirons ultérieurement. Elle nous offre en effet comme un cas pur de solidarité entre un ensemble d'opérations formelles définies par un système d'axiomes et l'existence d'un domaine où ces opérations soient réalisables.

Il semble qu'une certaine restriction adhère encore à ce schéma logique ; la genèse n'y a lieu en effet que dans un sens, des opérations au domaine. Or, si l'on peut établir entre le domaine et les opérations définissables sur lui, une appropriation rigoureuse, on peut chercher à déterminer aussi bien les opérations à partir du domaine que le domaine à partir des opérations. Nous venons de voir comment en logique les opérations s'appuient spontanément sur un domaine qu'elles semblent appeler par l'organisation même de leur structure ; nous verrons qu'inversement dans un très grand nombre de cas, le domaine paraît déjà préparé à donner naissance sur lui à certaines opérations abstraites. Notre intention étant de montrer que l'achèvement interne d'un être s'affirme dans son pouvoir créateur, cette conception devrait peut-être logiquement impliquer deux aspects réciproques : l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine.

Cette présentation symétrique des choses semble parfois justifiée lorsqu'il s'agit de certaines théories axiomatiques simples comme l'arithmétique ou la théorie des corps : il y a réciprocity absolue entre le domaine des nombres entiers et les axiomes de PEANO, entre le domaine de nombres rationnels et les axiomes qui définissent les quatre opérations de l'arithmétique. On peut aussi bien chercher les êtres mathématiques qui satisfont aux conditions des axiomes que les

axiomes qui définissent implicitement le domaine en question. L'expression de domaine fermé par rapport à certaines opérations montre bien dans ce cas l'équivalence étroite du point de vue « matériel » du domaine et du point de vue « formel » des opérations.

En fait, le schéma des genèses que nous allons décrire au sein de théories plus compliquées, abandonne l'idée trop simpliste de domaines concrets et d'opérations abstraites qui possèderaient en eux-mêmes comme une nature de matière ou une nature de forme ; cette conception tendrait, en effet, à stabiliser les êtres mathématiques dans certains rôles immuables et ignorerait le fait que les êtres abstraits qui naissent de la structure d'un domaine plus concret peuvent à leur tour servir de domaine de base pour la genèse d'autres êtres. Ce n'est donc qu'au sein d'un problème déterminé que l'on peut assigner des fonctions distinctes à des genres d'êtres différents ; le fait essentiel, c'est la genèse des genres de l'être les uns à partir des autres, et c'est dans un sens purement relatif, pour rendre compte de ces relations mutuelles que nous emploierons toujours le terme de « domaine » pour la structure donnée et celui de « d'être créé » pour l'objet final de la genèse décrite. Ainsi par exemple, en ce qui concerne la logique mathématique, malgré tout le sens « matériel » qui s'attache à l'expression de « réalisation », il nous paraît plus conforme au schéma logique que nous décrivons, de dire que ce sont les axiomes qui forment le domaine et que les interprétations émanent du domaine, comme des êtres qu'il crée.

Les théorèmes d'existence dans la théorie des fonctions algébriques.

Nous allons aborder maintenant l'étude d'exemples purement mathématiques, où l'on voit une structure préformer

l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que cette structure définit. Notre premier exemple est emprunté à la théorie des fonctions algébriques de RIEMANN. Nous avons vu au chapitre III comment RIEMANN avait été amené à associer à une fonction algébrique, une surface composée d'un certain nombre de feuillets soudés en croix le long de certaines coupures, et en chaque point de laquelle la fonction est uniformisable localement. On peut, par déformation continue, donner à cette surface de RIEMANN la forme d'un disque à deux faces, percé de trous ; le nombre p de ces trous est un invariant topologique de la surface qui détermine les $2p$ rétrosections de la surface, c'est-à-dire le nombre maximum de courbes fermées indépendantes que l'on peut tracer sur cette surface sans la diviser en deux régions séparées. Ce nombre p définit le genre de la surface. Cela posé, la pensée de RIEMANN n'est pas tant de construire la surface de RIEMANN d'une fonction algébrique qui serait définie par son équation algébrique, que de se donner une surface arbitraire pour chercher ensuite s'il existe une fonction algébrique dont cette surface soit la surface de RIEMANN. La méthode de RIEMANN ne procède pas directement, il est vrai, à la détermination des fonctions algébriques d'une surface, mais à la recherche des fonctions qui sont intégrales de fonctions algébriques. Ces intégrales sont appelées intégrales abéliennes, et il en existe de trois espèces : les intégrales de première espèce qui ne deviennent jamais infinies, celles de deuxième espèce qui présentent des pôles et celles de troisième espèce qui présentent des singularités logarithmiques (1). Le théorème essentiel de RIEMANN est

(1) On dit qu'une fonction analytique $\zeta = f(z)$ présente en un point z_0 , un pôle d'ordre n , lorsque son développement en série au voisinage de ce point se présente sous la forme

$$\zeta = \frac{a_1}{(z-z_0)^n} + \frac{a_2}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_n}{(z-z_0)} + a_{n+1} + \dots \quad a_1 \neq 0.$$

Une fonction du type $\zeta = \lg z = \lg r + i\varphi$ présente au point $r = 0$ une singularité logarithmique, car en ce point l'expression $\lg r$ devient infinie en valeurs négatives.

alors le suivant : le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes est égal au genre topologique de la surface. Il y a là une liaison d'une importance extraordinaire entre la structure topologique de la surface et l'existence des intégrales abéliennes partout finies sur cette surface ; aussi les mathématiciens ne peuvent-ils s'empêcher d'employer les termes les plus admiratifs pour décrire ce double rôle du genre. Voici par exemple ce qu'écrit M. H. WEYL : « On ne peut se refuser à reconnaître l'importance du nombre p en théorie des fonctions, et pourtant ce nombre est quant à sa nature et à ses origines une grandeur d'*Analysis situs*. Les grandes lignes de la théorie des fonctions... sont toutes inspirées par cette législatrice divine (göttliche Gesetzgeberin) qui plane invisible au-dessus de la réalité fonctionnelle : l'*Analysis situs* (1). » Nous voudrions entrer dans le détail de cette genèse de l'intégrale à partir du domaine et montrer le moment où insensiblement s'opère le passage de la structure de la surface à l'existence des intégrales partout finies. On démontre que si l'on prend deux points quelconques a et b sur la surface, et si l'on découpe la surface de a à b , il existe une fonction potentielle (2) $u_{a, b}$ qui admette les deux points a et b comme singularités logarithmiques, subisse en franchissant la coupure qui va de a à b une discontinuité déterminée et soit continue, finie et uniforme partout ailleurs sur la surface. Il est facile en partant de là, de définir une fonction potentielle qui n'ait aucune singularité logarithmique (ni aucun pôle) : il n'y a qu'à appliquer le théorème d'existence précédent au cas d'une suc-

(1) H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, p. 134.

(2) Rappelons qu'une fonction potentielle de deux variables obéit à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Soit une fonction analytique $\zeta = u + iv$. On démontre que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui figurent ainsi dans l'expression d'une fonction analytique, quand on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, sont des fonctions potentielles.

cession de points z', z'', z^{n-1}, z' , tels que le dernier coïncide avec le premier, et qui soient situés sur une des $2p$ courbes fermées qui ne divisent pas la surface en régions séparées (une rétrosection de la surface). On obtient ainsi des fonctions $u_{z' z''}, \dots u_{z^{n-1} z'}$ qui, en vertu d'un théorème d'addition, donnent naissance à la fonction potentielle

$$u(z) = u_{z' z''} + \dots u_{z^{n-1} z'}.$$

Cette fonction potentielle admet comme ligne de discontinuité la coupure fermée tout entière $z' z'' + \dots z^{n-1} z'$. Elle ne possède donc plus de singularités logarithmiques puisque les singularités des fonctions dont elle est la somme se trouvent toutes situées sur la courbe fermée qui est « découpée » de la surface, et elle n'est pas uniformément nulle puisque lorsque la variable z saute par dessus cette coupure, la valeur de la fonction subit un accroissement déterminé. De plus la coupure ne divisant pas la surface en deux régions, la fonction est finie, continue et uniforme sur toute cette surface. Comme il y a $2p$ rétrosections on peut définir ainsi $2p$ fonctions potentielles partout finies, et en les associant deux à deux, on obtient ainsi p intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes. On démontre ensuite qu'on ne peut obtenir d'autres, ce qui achève la démonstration du double rôle du nombre p (I).

On voit dans cette théorie l'importance du « découpage canonique » de la surface : la surface brute ne laisse rien apparaître sur elle ; par contre, la structure qu'elle reçoit de ses rétrosections la rend apte à une création : le moment précis de la genèse réside dans l'acte par lequel on confère à la structure une double interprétation : en tant que les rétrosections rendent la surface simplement connexe, elles ont une valeur topologique, en tant qu'elles obligent à des

(1) Cf. pour cette démonstration ; HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*, p. 368.

sauts les variables de certaines expressions fonctionnelles, elles répartissent déjà à l'avance ces intégrales sur la surface. Le passage de l'essence à l'existence devient ainsi une liaison entre la décomposition structurale d'un être et l'existence d'autres êtres que cette décomposition fait naître. Nous allons montrer que ce résultat se retrouve dans les théories où les problèmes de décomposition jouent un rôle essentiel : les théories algébriques.

Les théorèmes d'existence en théorie du corps de classes .

Nous avons déjà étudié au chapitre III un aspect de la théorie des corps de classes ; nous allons voir maintenant comment les théorèmes d'existence de cette théorie sont étroitement liés à une décomposition en classes des idéaux contenus dans le corps de base k . L'ensemble des idéaux de k forme un groupe par rapport à la multiplication. On établit dans ce groupe une division en classes de la façon suivante : On envisage le sous-groupe des idéaux principaux (ceux qui sont engendrés par les multiples d'un nombre entier du corps) et deux idéaux sont dits appartenir à la même classe lorsque leur quotient est un idéal principal. On obtient ainsi dans le groupe des idéaux d'un corps, h classes distinctes de groupes équivalents entre eux. Ce nombre h donne donc la notion structurale la plus importante relative aux idéaux du corps k ; il joue en théorie du corps de classes un rôle analogue au genre p de la théorie des surfaces de RIEMANN, et comme lui, peut être immédiatement interprété en termes d'êtres créés.

Nous avons vu page 69 comment certains sur-corps K de k , appelés corps de classes sur k , pouvaient être mis en relations avec les sous-groupes H du groupe de tous les idéaux de k . La théorie hilbertienne des corps de classes

quadratiques étudie les corps de classes qui peuvent être engendrés à partir du corps de base lorsqu'on adjoit à ce corps de base la racine carrée d'un élément μ contenu dans k . En somme k contient μ , mais ne contient pas $\sqrt{\mu}$ et l'on cherche dans quelles conditions l'extension $k(\sqrt{\mu})$ peut être corps de classes pour un groupe d'idéaux contenu dans k . Un résultat essentiel de la théorie, que nous ne pouvons qu'indiquer sans démonstration, établit un lien très précis entre le nombre h des classes d'idéaux dans k et l'existence dans k d'un nombre μ tel que $k(\sqrt{\mu})$ soit corps de classes : il faut pour qu'un pareil nombre existe, que le nombre de classes h soit pair (1). De même que dans la théorie des surfaces de RIEMANN, au nombre p était liée l'existence des intégrales abéliennes partout finies, en théorie du corps de classes, les propriétés du nombre h qui mesure les classes d'une décomposition interne du corps, se répercutent en affirmation d'existence relative à un nombre μ qui engendre un corps de classes quadratique $k(\sqrt{\mu})$.

Nous avons comparé une théorie où l'existence naît du découpage d'une surface, à une théorie où l'existence naît de la division en classes des idéaux d'un corps, parce que les analogies de ces théories nous paraissaient mettre en lumière une même conception des rapports de l'essence et de l'existence, où l'existence d'un être émerge de la décomposition structurale d'un domaine de base. Nous avons montré comment on pouvait rattacher cette conception à la distinction métamathématique de propriétés structurales et de propriétés extensives ; or, ces notions ne se sont précisées que depuis une dizaine d'années, et dès 1900, au Congrès de Paris, HILBERT établissait le rapprochement des deux théories mathématiques dont nous venons de parler ! Les

(1) Voir HILBERT, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (1897), reproduit dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. I. Le théorème en question y est démontré p. 155. Voir également HECKE, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, p. 154.

mathématiciens ont toujours admiré la puissance de divination d'un génie qui pouvait énoncer en 1900, 23 problèmes à résoudre dont la plupart furent ensuite résolus par lui-même ; nous allons citer un fragment de cette Conférence qui concerne le problème que nous traitons actuellement et où il nous semble qu'HILBERT ébauche la philosophie des genèses mathématiques que devait nous suggérer la logique qu'il allait développer 20 ans plus tard : « L'analogie, écrit-il (1), entre le concept du genre d'une surface de RIEMANN et le nombre de classes d'un corps de nombres saute aux yeux. Considérons, pour prendre le cas le plus simple, une surface de RIEMANN de genre 1 et un corps de nombres dont le nombre de classes h soit égal à 2. A la démonstration de l'existence d'une intégrale partout finie sur la surface correspond la démonstration de l'existence d'un nombre α dans le corps de nombres tel que le nombre $\sqrt{\alpha}$ engendre un sur-corps quadratique non ramifié sur le corps de base » (c'est-à-dire un corps de classes). Ce texte ne contient peut-être pas les termes du commentaire philosophique que nous en avons donné, il en contient à coup sûr l'esprit. Du genre de la surface ou du nombre de classes du corps à l'existence de l'intégrale ou à celle du nombre α , il ya en effet passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être, et la possibilité de ce passage résulte de la découverte d'une façon de structurer un domaine qui le rende apte à une création.

La théorie de la représentation des groupes.

La théorie de la représentation des groupes va nous montrer comment le rôle de domaine et celui d'êtres créés, ne dépendent pas de la nature intrinsèque des êtres mathématiques en question, mais leur sont conférés par leurs fonctions

(1) HILBERT, *Mathematische Probleme*. Problème 13 dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 312.

respectives dans un processus de genèse. La notion de « représentation » a historiquement un sens plus « concret », plus « matériel » que la notion de groupe, mais comme les représentations naissent de la structure des groupes, il sera plus conforme à notre conception d'assigner au groupe la nature de domaine, et de voir dans les représentations, des êtres abstraits créés sur ce domaine qu'on appelle l'espace du groupe. Nous verrons du reste que ce changement de perspective correspond bien à l'évolution actuelle de la notion de représentation.

La notion de groupe a son origine dans les groupes de transformations. Un groupe de transformations présuppose un espace de points E sur lesquels sont définies les opérations du groupe. Un ensemble de transformations forme un groupe si étant donné une transformation S qui fait passer du point p au point p' et une transformation T qui fait passer du point p' au point p'' , il existe une transformation, considérée comme le produit ST des deux premières, qui fasse passer du point p au point p'' . Il faut de plus que le groupe contienne la transformation identique, qui fait correspondre à chaque point ce point lui-même, et enfin, que pour toute transformation il existe une transformation inverse. Cela posé, on peut négliger dans les transformations leur sens d'opérations définies sur un espace de points, et n'y voir plus que les éléments d'un ensemble abstrait au sein duquel est définie une certaine loi de composition. Ce qu'on obtient alors est un groupe abstrait dont les éléments n'ont plus aucune signification intrinsèque et peuvent être considérés comme les points d'un espace abstrait : l'espace du groupe. On peut alors inversement passer de ce groupe abstrait à un groupe de transformations en redonnant une nature de transformations aux éléments du groupe. C'est en ce sens qu'un groupe de transformation *réalise* un groupe abstrait. En particulier, lorsque la réalisation du groupe fait correspondre à chaque élément du groupe une transformation li-

néaire et homogène de l'espace de points primitif (voir plus haut p. 34), on a ce qu'on appelle une *représentation* du groupe. Une représentation est donc une correspondance entre les éléments s d'un groupe abstrait et des transformations U opérant sur les points de l'espace E , et définies par des équations du type suivant :

$$\begin{aligned} x'_1 &= u_{11} x_1 + \dots u_{1n} x_n \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x'_n &= u_{n1} x_1 + \dots u_{nn} x_n. \end{aligned}$$

La pensée de M. WEYL est sans aucun doute de considérer (1) que des transformations au groupe abstrait, il y a appauvrissement et qu'en sens inverse la descente du groupe abstrait aux représentations qui opèrent sur un espace de points, nourrit de matière la forme un peu vide du groupe abstrait. Les représentations du groupe jouent bien ainsi par rapport au groupe abstrait le rôle des interprétations d'un système d'axiomes en logique. Nous allons voir que malgré ce caractère concret qui leur vient de leurs origines géométriques, les représentations peuvent être considérées comme des êtres abstraits définis sur l'espace de groupe ; nous verrons ensuite comment leur existence est liée à la structure de cet espace.

Les représentations que nous allons envisager sont celles qui sont unitaires et irréductibles. Une représentation est unitaire si les transformations qui la constituent laissent invariante une forme hermitienne $x_1 \bar{x}_1 + \dots x_n \bar{x}_n$ (2) elle est de plus irréductible si elle ne laisse invariant aucun sous-espace de l'espace sur lequel elle opère. Soient alors s un élément variable du groupe et U la transformation correspondant à cet élément s dans une représentation

(1) H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, chap. III.

(2) $\bar{x}_i$ est la variable conjuguée complexe de x_i .

unitaire et irréductible du groupe. Cette transformation est caractérisée par un tableau de coefficients :

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11} & \dots & u_{1n} & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} & & & & \end{array}$$

et nous désignerons un élément quelconque de ce tableau par $u_{ik}(s)$ pour bien montrer que les coefficients d'une transformation dépendent d'un élément s du groupe. Ils se présentent ainsi comme des fonctions d'une variable qui n'est autre que l'élément variable du groupe; ce sont donc comme des fonctions définies sur l'espace du groupe et un théorème essentiel de la théorie établit que les coefficients de toutes les représentations unitaires, irréductibles et non équivalentes (1) entre elles forment sur l'espace de groupe un système complet de fonctions de base. Ceci veut dire que toutes les fonctions définissables sur l'espace du groupe peuvent être représentées comme une combinaison linéaire des coefficients de ces représentations. S'il s'attache encore à la notion de représentation un sens géométrique, ce sens est totalement absent de la notion de fonction définie sur un espace de groupe et l'on voit que sous ce nouvel aspect de fonctions de base, les coefficients des représentations envisagées ont bien le sens d'être abstraits définis sur l'espace de groupe.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à indiquer comment, dans le cas de groupes finis, ces êtres abstraits sont non seulement définis sur l'espace de groupe mais émanent directement de sa structure. La structure d'un groupe, c'est essentiellement le nombre de ses classes. Soit a un élément

(1) Soient s un élément du groupe, $U(s)$ la transformation correspondant à s dans un certain système de coordonnées de l'espace fondamental E . Soit A la matrice d'un changement de coordonnées de cet espace. La représentation $s \rightarrow U(s)$ est transformée en une représentation équivalente $s \rightarrow AU(s)A^{-1}$.

fixe et s un élément quelconque d'un groupe, l'élément asa^{-1} est dit conjugué de s par rapport à a . Deux éléments conjugués sont dits appartenir à la même classe et le groupe se décompose ainsi en classes d'éléments conjugués. Cette division en classes se laisse interpréter en termes de genèse, en ce qui concerne les représentations du groupe ; on a en effet pour les groupes finis le théorème suivant : Le nombre des représentations irréductibles et non équivalentes entre elles (1) est égal au nombre des classes du groupe (2). Le nombre de ces classes caractérise une décomposition interne du groupe ; il a également un sens créateur puisqu'il détermine le nombre des représentations dont les coefficients forment un système de base pour les fonctions de l'espace du groupe. Son rôle est donc en tout point comparable à celui du nombre p dans la théorie des surfaces de RIEMANN.

Nous venons d'étudier les cas les plus nets où la structure d'un domaine est immédiatement interprétable en termes d'existence pour certaines fonctions définies sur ce domaine : ce sont les cas où cette structure est caractérisée par un nombre attaché à la décomposition du domaine de base. Les genèses mathématiques reposent ainsi sur le double sens de ce nombre, structural et créateur. Nous avons donc là un moyen de distinguer dans les relations que soutiennent entre eux deux genres d'êtres mathématiques différents, ceux qui jouent le rôle de domaine concret et ceux qui peuvent être conçus comme êtres abstraits créés sur ce domaine. Il est parfaitement possible qu'un même genre d'être joue dans un schéma de genèse le rôle d'abstrait par rapport à un concret de base et soit au contraire dans une autre genèse le concret d'un nouvel abstrait. Ainsi, par exemple, l'espace de groupe peut être à la fois conçu comme être

(1) Dans le cas de groupes finis, toute représentation est équivalente à une représentation unitaire.

(2) Cf. H. WEYL, *op. cit.*, p. 130.

abstrait par rapport à un espace de points fondamental et comme domaine concret par rapport aux représentations du groupe. L'élément essentiel dans le passage de l'essence à l'existence, ce n'est pas tant la nature du rôle assumé par chacun des genres de l'être en présence, que l'existence même du passage entre deux genres de l'être.

Une pareille présentation des choses implique un tel renversement par rapport aux habitudes de pensée classiques, qu'il nous faut encore insister en terminant, sur le sens nouveau que reçoivent ici les expressions de *concret* et d'*abstrait*. Le « groupe abstrait », au sens mathématique du terme, de même que les systèmes d'axiomes de la mathématique formalisée sont souvent conçus comme des structures purement formelles, « abstraites » au sens de la philosophie classique du concept, et indépendantes de leurs réalisations arithmétiques ou géométriques. Il nous a semblé, avons-nous vu, que ces structures « abstraites » au sens classique étaient si profondément engagées dans la genèse de leurs réalisations, qu'il valait mieux abandonner toute référence à une ontologie dans l'usage des expressions de concret et d'abstrait pour ne plus désigner respectivement par ces termes que les structures de base et les êtres dont l'existence est déterminée par ces structures.

Cette conception des rapports du concret et de l'abstrait nous paraît particulièrement adaptée à exprimer non seulement l'*engagement* du concret dans la genèse de l'abstrait, mais encore les relations d'*imitation* qui peuvent exister entre la structure de cet abstrait et celle du concret de base. Nous n'en donnerons qu'un exemple : On peut définir pour certains systèmes de nombres (dits systèmes hyper-complexes), de même que pour leurs représentations, un mode de décomposition complète en éléments irréductibles. Un théorème essentiel de la théorie établit alors une relation étroite entre la décomposition complète de certains de

ces systèmes hypercomplexes et celle de toutes leurs représentations (1). Nous voyons bien ainsi comment dans certains cas, la genèse de l'abstrait à partir d'un concret de base, s'affirme jusqu'à réaliser une imitation de structure entre ces genres d'êtres qui naissent l'un de l'autre.

(1) Cf. VAN der WAERDEN. *Moderne Algebra*, t. II, p. 180.

CHAPITRE V

Les mixtes.

Ce qui caractérise les genèses que nous avons décrites au chapitre précédent, c'est que les êtres créés y procèdent directement du domaine de base, et que d'un genre de l'être à un autre genre, il y a ainsi passage immédiat. La structure du domaine joue bien dans ces créations un double rôle, puisqu'elle est interprétable à la fois comme une décomposition du domaine et comme une répartition de nouveaux êtres sur ce domaine ; elle n'est cependant pas un troisième genre interposé entre le domaine et les êtres créés, car elle est tout entière inhérente au domaine qui la reçoit.

Certaines genèses mathématiques ne se laissent pourtant pas décrire par des schémas de ce type. Elles obéissent à des schémas plus compliqués où le passage d'un genre à un autre genre nécessite la considération de mixtes intermédiaires entre le domaine et l'être cherché ; le rôle médiateur de ces mixtes va résulter de ce que leur structure imite encore celle du domaine auquel ils se superposent, alors que leurs éléments sont déjà du genre des êtres qui naîtront sur ce domaine. Voulant adapter l'une à l'autre des réalités radicalement hétérogènes, les mathématiques retrouvent dans leur développement propre la nécessité logique d'une médiation comparable à celle du schématisme de l'Analytique transcendantale, intermédiaire entre la catégorie et l'intuition. Le texte où KANT définit le schématisme est pour nous à cet

égard d'une importance qui dépasse de beaucoup le problème spécial de la philosophie de l'entendement ; il contient comme une théorie générale des mixtes que nous verrons s'appliquer presque parfaitement aux besoins de la philosophie mathématique. Voici ce texte : « Or, il est évident qu'il doit y avoir un troisième terme qui soit homogène, d'un côté à la catégorie et de l'autre au phénomène et qui rende possible l'application de la première au second. Cette représentation intermédiaire doit être pure (sans aucun élément empirique) et pourtant il faut qu'elle soit d'un côté intellectuel, et de l'autre sensible. Tel est le schème transcendantal... Une détermination transcendantale du temps est homogène à la catégorie (qui en constitue l'unité), en tant qu'elle est universelle et qu'elle repose sur une règle *a priori*. Mais d'un autre côté elle est homogène au phénomène, en ce sens que le temps est impliqué dans chacune des représentations empiriques de la diversité. Une application de la catégorie à des phénomènes sera donc possible au moyen de la détermination transcendantale du temps, c'est cette détermination qui, comme schème des concepts, sert à opérer la subsumption des phénomènes sous la catégorie (1). » Le moment essentiel de cette définition est celui où le schème est conçu à deux points de vue différents, comme homogène à la nature de deux réalités essentiellement distinctes et entre lesquelles il sert d'intermédiaire nécessaire pour tout passage de l'une à l'autre. Les mixtes des théories mathématiques assurent le passage d'un domaine de base à l'existence d'êtres créés sur ce domaine par l'effet d'une pareille dualité interne.

Il est possible de trouver une première ébauche de ces mixtes dans les théories dont nous avons parlé au chapitre précédent. Considérons tout d'abord la théorie des champs en logique mathématique. La propriété extensive pour une formule d'être réalisable dans un champ de k individus

(1) KANT, *Critique de la raison pure*. Ed. Ac. Berlin, t. III, p. 142.

implique, avons-nous vu page 88, que le domaine de variation des variables de la formule comprend au moins k individus et qu'il est possible de trouver un choix de valeurs des variables qui font de la formule, une formule vraie au sens ordinaire. Ces recherches s'appuient sur le fait que dans le cas de domaines finis (au sens ordinaire) toute formule logique peut être mise sous forme d'une disjonction de termes dont aucun ne contient plus de variables. Si l'un de ces termes est vrai, et ceci est déterminable en un nombre fini d'étapes, la disjonction est une identité et la formule primitive est alors réalisable. Ainsi, par exemple, dans un champ ne contenant que les deux variables 1 et 2, l'expression $(Ex) P(x, x)$ est équivalente à $P(1,1) \vee P(2,2)$. La simple inspection des deux expressions arithmétiques $P(1,1)$ et $P(2,2)$ permet de voir si l'une ou l'autre de ces expressions est vraie et par là-même résout le problème de savoir si la formule est réalisable. Nous avons déjà signalé que lorsque les variables peuvent prendre une infinité de valeurs, il devient impossible de former la disjonction qui résulte de toutes les substitutions possibles ; on ne peut donc découvrir par un processus fini la substitution qui réalise la proposition donnée et c'est à cette impossibilité qu'est due, comme nous l'avons montré, le passage du point de vue extensif de la réalisation au point de vue structural de l'irréfutabilité. Le point de vue extensif reparait cependant dans les recherches d'HERBRAND, mais sous la forme de champs métamathématiques, intermédiaires entre les signes des formules et les champs mathématiques de leurs valeurs effectives.

L'intention d'HERBRAND est de ramener toute proposition arithmétique, et ceci quelle que soit l'étendue du domaine de définition des variables, à une disjonction finie de termes, ne contenant plus de variables et dont l'examen permet ainsi, comme dans le cas de champs mathématiques finis, de décider si cette disjonction est une identité logique. Il lui a donc fallu trouver une manière de définir, pour une variable

susceptible de prendre une infinité de valeurs mathématiques, un nombre fini de valeurs métamathématiques, qui symbolisent ainsi l'existence de cette infinité si difficile à manier. Soit par exemple la variable y intervenant sous la forme « particulière » : (Ey) , (il existe un y tel que ...); cet y peut être égal à l'un quelconque des termes d'un ensemble infini; HERBRAND (1) n'envisage cependant comme domaine de valeurs de cette variable qu'un champ C_1 composé d'une seule valeur a_1 . Soit maintenant la variable z intervenant sous la forme « générale » : (z) (pour toute valeur de z); HERBRAND associe à cette variable générale une certaine fonction d'indice f_z qui a pour arguments les variables restreintes précédant la variable générale en question; les valeurs de cette fonction d'indice sont situées dans un champ C_2 qui ne contient que le nombre d'éléments nécessaires pour que toutes les fonctions élémentaires (fonctions descriptives données dans la formule et fonctions d'indice) fassent correspondre aux différentes valeurs $a_1, \dots, a^n$ de C_1 , des valeurs différentes $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$ dans le champ C_2 . Si l'on a par exemple la succession suivante de signes de variables : $(Ey) (z)$ (il existe un y tel que pour toute valeur de z), et si a_1 est la valeur de (Ey) , à z correspond la fonction $f_z(y)$ à laquelle on donne par convention comme valeur la lettre a_2 d'un champ C_2 ; a_2 représente la « valeur » de z pour la valeur a_1 de y . On construit ainsi par récurrence une série finie de champs d'ordre croissant dont chacun contient les valeurs des fonctions descriptives et des fonctions d'indice à arguments pris dans les champs d'ordre inférieur et dont la valeur n'ait pas encore été donnée. Les éléments de ces champs sont donc en étroite correspondance avec les signes des variables des formules; ils constituent plutôt un système de nouveaux signes que l'on substitue aux premiers qu'un ensemble de véritables valeurs pour les variables

(1) Cf. HERBRAND *Thèse*, p. 99.

désignées par ces signes. D'un autre côté, ils n'en possèdent pas moins une nature de champs indépendants de la formule qu'ils réalisent, et présentent bien ainsi un premier aspect de mixtes en tant qu'ils sont intermédiaires entre les signes formels et leurs valeurs mathématiques effectives. De ce premier caractère on peut en dégager un second, infiniment précieux pour la conception générale des mixtes en mathématiques. Intermédiaires entre les signes et leurs valeurs, ces champs sont, d'une part homogènes à la discontinuité finie des signes puisqu'à un signe de variable (Ey) ne correspond qu'une valeur a_1 et, d'autre part ils symbolisent une infinité de valeurs mathématiques puisque la lettre a_1 représente n'importe quelle valeur mathématique éventuelle de la variable y lorsqu'elle intervient sous la forme particulière (Ey). Une médiation s'opère donc par ces champs du fini à l'infini, qui permet dans les cas traités par HERBRAND de dominer l'infini et tel est le rôle que nous reconnaitrons aux mixtes que nous allons envisager maintenant. Nous allons voir en effet à propos de l'espace de HILBERT comment entre la continuité d'un domaine de base et la discontinuité des solutions de certaines expressions définies sur ce domaine, s'interpose un mixte qui tient du continu par l'origine et la topologie de ses éléments, du discontinu par ses propriétés structurales et qui permet la liaison de l'un à l'autre.

L'espace de Hilbert.

Nous avons vu au chapitre I comment certaines équations différentielles ou aux dérivées partielles ne pouvaient être résolues que si l'on se donne également les conditions aux limites, initiales et finales auxquelles doivent satisfaire les fonctions qui sont solutions de l'équation proposée. Considérons par exemple une membrane vibrante encastrée par ses bords dans une paroi fixe ; l'équation qui traduit

l'oscillation d'un point de cette membrane est l'équation classique $\Delta u + \lambda u = 0$; il est évident que toute solution u doit être nulle aux limites de la membrane. Considérons encore en mécanique quantique, l'équation de SCHRÖDINGER qui exprime l'amplitude a d'un corpuscule de masse m oscillant dans un champ extérieur d'intensité V et possédant une énergie E . Cette équation s'écrit :

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(x, y, z)] a = 0 \quad (I).$$

Etant donné que l'amplitude a est l'amplitude d'une onde associée à un corpuscule, il est naturel d'admettre qu'elle n'occupe qu'une région limitée de l'espace des x, y, z , et qu'elle est nulle aux limites de cette région. Le domaine de base est évidemment dans ces cas le domaine D de variation des variables. Les êtres dont on cherche à déterminer l'existence sont les fonctions qui sont solutions du problème, mais la structure du domaine n'est pas directement adaptée à la mise en évidence de ces solutions. Les schémas de genèse du chapitre précédent sont ainsi impuissants à décrire le passage à l'existence pour des équations de ce type.

Ces équations ont une importance considérable car leur solution présente comme une synthèse remarquable de notions continues et de notions discontinues. Elles ne sont en effet susceptibles de solutions $u_1...u_n...$, continues sur tout le domaine des variables et nulles aux limites que pour certaines valeurs discontinues du paramètre, $\lambda_1, \lambda_2... \lambda_n...$, qui forment le spectre des valeurs propres de l'équation. Les solutions propres $u_1... u_n...$ correspondant à ces valeurs propres ont une propriété essentielle pour toute la théorie que nous allons exposer : elles forment un système complet de fonctions sur le domaine de base D . Ceci veut dire que

(I) LOUIS DE BROGLIE, *La théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique*, p. 43.

toute fonction continue dans ce domaine, deux fois différentiable et nulle aux limites, peut être représentée comme une combinaison linéaire de ces fonctions de base ; on dit encore que toute fonction arbitraire $f(x, y, z)$ sur le domaine, peut être développée en série convergente dans le système des fonctions de base sous la forme suivante :

$$f(x, y, z) = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots c_n u_n \dots$$

Une situation analogue s'est retrouvée dans l'étude des équations intégrales (1). Considérons tout d'abord l'équation intégrale linéaire et homogène (c'est-à-dire sans second membre) :

$$I \quad \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt = 0.$$

La variable s variant de 0 à 1, la fonction inconnue cherchée est la fonction $\varphi(s)$; la fonction $K(s, t)$ est une fonction continue donnée de deux variables ; c'est le noyau de l'équation intégrale, que nous supposerons dans la suite symétrique en s et en t : $K(s, t) = K(t, s)$. On démontre comme dans les problèmes précédents que pour $0 < s < 1$, l'équation I n'a de solutions que pour certaines valeurs discontinues du paramètre, les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \dots$; les solutions $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ qui leur correspondent sont de nouveau appelées les solutions ou fonctions propres de l'équation homogène. Nous verrons plus loin que les fonctions et les valeurs propres dépendent essentiellement du noyau $K(s, t)$; ce qui nous intéresse ici, c'est que dans le cas où il existe une infinité dénombrable de fonctions propres, elles forment un système complet de base pour l'ensemble des fonctions $f(s)$ qui satisfont à une équation du type :

(1) Cf. pour tout ceci : Ernst HELLINGER, *Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme*, dans HILBERT, *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 94 sqq.

$$f(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt,$$

$x(s)$ étant une fonction continue quelconque.

On a donc $f(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \varphi_n$ et ce théorème de développement en série uniformément convergente de fonctions propres du noyau $K(s, t)$ s'applique en particulier aux fonctions qui sont solutions de l'équation intégrale non homogène (avec second membre)

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt = f(s).$$

Toute solution de l'équation non homogène est limite de combinaisons linéaires finies des fonctions propres de l'équation homogène correspondante. On peut alors voir poindre l'idée centrale qui a guidé HILBERT dans sa théorie générale des équations intégrales linéaires : Construire sur le domaine $0 < s < 1$ un espace de fonctions jouissant de caractéristiques globales telles que l'on puisse, par une décomposition appropriée de cet espace, y distinguer un système de fonctions de base qui soient en même temps fonctions propres de l'équation proposée. En tant qu'elles forment un système de base pour les fonctions de l'espace fonctionnel, elles sont liées à la structure de cet espace ; en tant qu'elles sont fonctions propres de l'équation proposée, elles se détachent de l'ensemble des autres fonctions de l'espace pour apparaître avec leur sens nouveau de solutions. Il n'existe peut-être pas de cas plus net où la décomposition structurale d'un espace soit équivalente à l'affirmation d'existence de fonctions cherchées, et nous allons voir que l'espace fonctionnel de cette théorie se prête à de pareilles genèses parce que d'une part il est doué d'une topologie comme un ensemble de points, et que d'autre part ses éléments sont déjà homogènes aux solutions cherchées qui se trouvent ainsi comprises dans cet espace avant que d'y être reconnues.

Nous allons d'abord étudier des schémas de genèse dans l'espace de HILBERT qui est un espace vectoriel et verrons ensuite l'application des résultats ainsi trouvés aux espaces fonctionnels de la théorie des équations intégrales.

Voici la définition axiomatique de l'espace H de HILBERT d'après J. VON NEUMANN (1) :

- A. H est un espace vectoriel ; c'est donc un ensemble d'éléments $x, y, \dots$ où sont définies l'addition $x + y$ de deux vecteurs et la multiplication $\alpha \cdot x$ d'un vecteur par un nombre complexe α .
- B. H est hermitien. Ceci veut dire qu'étant donné deux vecteurs quelconques x et y de H , il existe un « produit scalaire » (x, y) des deux vecteurs jouissant des propriétés suivantes :

$$1^0 (x, y) \text{ est linéaire en } x \quad (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y).$$

2⁰ (x, y) possède la symétrie hermitienne :

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad (2).$$

3⁰ le produit scalaire (x, y) engendre l'existence d'une forme hermitienne positive, définie :

$$(x, x) = |x|^2 > 0 \quad \text{sauf si } x = 0.$$

Cette forme $|x|^2$ définit une métrique dans l'espace H .

C. H est complet au sens de la métrique.

D. H est à une infinité dénombrable de dimensions.

Il existe dans un pareil espace une infinité de systèmes complets de vecteurs de base $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, tels que l'on ait pour tout vecteur x de H : $x = \sum c_i \varphi_i$.

Nous allons considérer maintenant dans H , une variété linéaire fermée à n dimensions, c'est-à-dire un sous-espace

(1) Nous nous référons à l'exposé de M. André WEIL. *Séminaire de mathématiques de l'Institut H. Poincaré*, année 1934-1935.

(2) D'une façon générale $\overline{x}$ est la quantité conjuguée complexe de x .

de l'espace de HILBERT. On peut attacher à cette variété des « formes hermitiennes », c'est-à-dire des expressions algébriques formées à partir des vecteurs de la variété et susceptibles d'être décomposées d'une façon particulièrement remarquable, lorsqu'on fait choix pour exprimer les coordonnées des vecteurs, d'un système « propre » de vecteurs de base. C'est la liaison de ce choix du système de base à la décomposition de formes hermitiennes qui est l'étape essentielle des schémas de genèse que nous voulons décrire dans ce chapitre.

Soit un opérateur linéaire A agissant sur les éléments x de la variété, c'est-à-dire tel que Ax soit également élément de la variété. Les formes hermitiennes que nous envisagerons sont les produits scalaires (x, Ax) . Il résulte des axiomes de l'espace de HILBERT que $(x, Ax) = A(x, x) = \overline{A(x, x)}$. Si l'on fait choix d'un système de base quelconque dans la variété, les vecteurs x ont sur les axes de coordonnées choisis, des composantes x_i et l'on a :

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i \overline{x_k}; \quad a_{ik} = \overline{a_{ki}}.$$

Dans le système de base adopté, la forme hermitienne $A(x, x)$ est donc caractérisée par la matrice de coefficients

$$A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cette matrice comprend des termes « rectangles » pour lesquels les deux indices sont différents, et des termes « carrés » ($i=k$), les termes diagonaux. Il est alors possible, et c'est là le point central de la théorie, de trouver un système de vecteurs de base privilégié $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$, tel que les composantes d'un vecteur x étant devenus dans ce système $x'_1, x'_2 \dots x'_n$, la forme hermitienne soit transformée en une somme $\sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i \overline{x'_i}$ ne

contenant plus que des termes « carrés ». Le changement de système de base a donc pour effet de transformer la matrice A^* en une matrice ne contenant plus que des termes diagonaux :

$$A^{*'} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{vmatrix}$$

Les α_i sont les « valeurs propres » de l'opérateur A , auxquelles correspondent les vecteurs propres φ_i .

Ces résultats qui sont dus à HERMITE dans le cas d'une variété à n dimensions, HILBERT les a étendus à l'espace H à une infinité de dimensions. Nous n'avons pas à entrer ici dans l'étude des conditions de convergence extrêmement délicates qui ont permis le passage à l'infini, seul nous importe l'aspect final de la théorie : On décompose en somme, l'espace H en sous-espaces orthogonaux les uns aux autres $H_1, H_2 \dots$. Chacun de ces sous-espaces est sous-tendu par les vecteurs propres correspondant à une valeur propre α_i . La forme hermitienne $A(x, x)$ devient alors égale à la somme de ses projections $A(x, x) = \sum \alpha_i x'_i \bar{x}'_i$ dans chacun de ces différents sous-espaces. On voit donc le double rôle des vecteurs propres : ils ont un rôle structural dans l'espace dont ils sous-tendent les parties orthogonales les unes aux autres, ils ont également un sens d'existence pour l'opérateur A puisqu'ils constituent le système de vecteurs privilégiés qui permet la réduction de la forme hermitienne en une somme de carrés.

Ces considérations s'appliquent immédiatement à l'espace fonctionnel de la théorie des équations intégrales. Soit un espace fondamental E . Ce sera le domaine de base de nos schémas de genèse, l'espace fonctionnel étant un mixte interposé entre E et les fonctions cherchées. Soit μ une mesure de LEBESGUE définie sur E . On considère l'ensemble Ω des fonctions $f(p)$ à valeur complexe telles que $\int_E f(p) d\mu$

existe et que $\int_E |f(p)|^2 d\mu$ ait une valeur finie. On obtient ainsi l'espace des fonctions de carré sommable qui est d'après les travaux de RIESZ et de FISCHER isomorphe à l'espace de HILBERT. Cet espace possède donc une topologie identique à celle de l'espace H . Soit $\int_E |f_m(p) - f_n(p)|^2 d\mu$ l'expression de la distance de deux fonctions de l'espace ; l'espace est complet au sens de cette métrique et il existe une infinité de systèmes de base dénombrables tels que toute fonction de Ω puisse être développée en série convergente (au sens de la métrique définie dans Ω), $f(s) = \sum_{i=1}^{i=\infty} c_i \varphi_i$.

Il ne nous reste plus qu'à voir le rôle de ce mixte qu'est l'espace Ω des fonctions de carré sommable, dans la genèse des solutions propres d'une équation intégrale à noyau symétrique. Nous n'envisagerons que l'étude des fonctions propres du noyau $K(s, t)$ qui sont situées dans l'espace Ω ; leur détermination va se faire par une décomposition privilégiée de cet espace qui joue, par rapport au noyau $K(s, t)$ le rôle que joue dans l'espace de HILBERT la décomposition en espaces propres correspondant à une forme hermitienne $K(x, x)$. Pour cela, et c'est le point central, HILBERT associe à l'espace des fonctions de carré sommable un espace H tel qu'au noyau $K(s, t)$ corresponde une forme hermitienne $K(x, x) = \sum k_{pq} x_p \bar{x}_q$. L'espace H se décompose, comme nous venons de le voir en sous-espaces propres définis chacun par les vecteurs propres correspondant à une valeur propre de l'opérateur K . On passe ensuite immédiatement des vecteurs propres et des valeurs propres de l'opérateur K dans l'espace de HILBERT aux fonctions propres et aux valeurs propres du noyau $K(s, t)$ dans l'espace Ω et l'on obtient ainsi les solutions de l'équation intégrale.

La genèse de ces solutions se fait donc suivant le schéma suivant : le domaine de base E est le domaine de variation de la variable. On superpose à ce domaine de base un espace

fonctionnel qui, par sa topologie, est dans une certaine mesure comparable à un espace de points et dont les éléments sont des fonctions homogènes aux fonctions cherchées. Une décomposition de cet espace en espaces propres met alors en évidence l'existence des fonctions propres de l'équation. Le moment essentiel de cette genèse est donc contenu dans la décomposition de l'espace, ou ce qui est équivalent, dans la réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés et là encore un texte d'HILBERT de 1909 caractérise de la façon la plus nette la liaison d'une décomposition structurale et de l'existence de solutions : « Une forme quadratique $Q(x)$ peut toujours quand elle est continue, être transformée par une transformation orthogonale en une somme de carrés des nouvelles variables x' telles que l'on ait : $Q(x) = k_1 x'_1{}^2 + k_2 x'_2{}^2 \dots$ De ce théorème découle le théorème important suivant : un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues — par conséquent une équation intégrale — possède en ce qui concerne le nombre et l'existence de ses solutions toutes les propriétés d'un système à un nombre fini d'équations possédant les mêmes inconnues (1). »

L'importance de la théorie de l'espace de HILBERT développée par HILBERT et ses élèves, en particulier WEYL et VON NEUMANN est considérable dans la physique nouvelle ; il s'est trouvé en effet que cette théorie constituée entre 1904 et 1906 était l'outil le plus adapté à l'interprétation des mécaniques quantiques. Reprenons par exemple l'équation de SCHRÖDINGER : $\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(x, y, z)] a = 0$.

Le paramètre variable étant l'énergie E , cette équation n'a de solutions que pour des niveaux discontinus d'énergie qui sont les valeurs propres de l'équation. On a souvent opposé

(1) HILBERT, *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen*. *Gesamm. Abh.*, t. III, p. 59.

la physique du continu à la physique du discontinu ; nous voyons que le problème de la genèse du discontinu sur le continu n'est pas un problème de physique, le drame se joue plus haut, au niveau des mathématiques ; le continu, c'est le domaine de variation de la variable, le discontinu ce sont les solutions, et ce mixte qu'est l'espace d'HILBERT est homogène au continu par la nature et la topologie de ses éléments, et au discontinu par ses décompositions structurales. La théorie des rapports mathématiques du continu et du discontinu nous paraît donc recevoir tout son sens du fait qu'en elle s'incarne le schéma de genèses plus abstraites, où le passage du continu au discontinu se fait par l'intermédiaire de mixtes dont la fécondité résulte des propriétés de leur double nature.

Les familles normales de fonctions analytiques.

Nous allons étudier maintenant un autre modèle de mixtes, également intermédiaires entre un domaine de base et une fonction cherchée. Ce sont les familles « normales » de fonctions analytiques dont la considération a amené M. MONTEL (1) à une théorie d'une extrême richesse. Nous allons donner un exemple de cette fonction médiatrice des familles normales en nous appuyant sur l'exposé que fait M. MONTEL d'un théorème de M. CARATHEODORY. Il s'agit de démontrer que tout domaine D simplement connexe du plan de la variable complexe Z peut être représenté de façon conforme (voir p. 79) sur un cercle d du plan de la variable complexe z lorsque la frontière du domaine ne se réduit pas à un point. Le domaine de base au sens de nos schémas de genèse est évidemment le domaine simplement connexe en ques-

(1) Voir pour tout ce paragraphe : P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*.

tion, la fonction cherchée est la fonction $z = G(Z)$ qui assure la représentation conforme du domaine sur le cercle et à laquelle correspond la fonction inverse $Z = f(z)$ qui assure la représentation conforme du cercle sur le domaine.

Ce qui nous intéresse dans ce problème c'est le moment où intervient la nécessité d'un mixte, c'est-à-dire le moment où les modes de passage à l'existence qu'offrent les théories plus simples ne sauraient convenir aux conditions envisagées. Nous admettons donc les théorèmes classiques qui établissent l'existence d'une représentation conforme de domaines limités par des polygones rectilignes sur un cercle, et partons du fait que ces théorèmes ne peuvent s'appliquer au cas d'un domaine D , borné, simplement connexe et dont la frontière ne se réduit pas à un point. La méthode de M. CARATHEODORY consiste alors à interposer entre le domaine D et la fonction $z = G(Z)$, une famille de fonctions telle que la structure interne de cette famille entraîne immédiatement l'existence au sein de cette famille de la fonction cherchée. La condition de structure employée est celle de compacité. C'est une notion topologique qui lorsqu'elle est relative à une famille de fonctions, permet de comparer cette famille à un espace de points et assure ainsi une certaine homogénéité entre la nature de la famille de fonctions et la nature du domaine de base. Comme d'autre part la famille de fonctions est composée de fonctions et non de points, ses éléments sont en un autre sens homogènes à la fonction cherchée, de sorte qu'elle présente bien l'aspect d'un mixte intermédiaire entre deux réalités hétérogènes. Voici ce qu'est la compacité : étant donné une suite infinie de points, cette suite est dite compacte, c'est-à-dire qu'il est toujours possible d'extraire de cette suite une suite partielle qui converge uniformément vers un point limite. En ce qui concerne les suites de fonctions analytiques, la propriété de compacité n'est plus générale ; il faut pour qu'elle s'applique, que les fonctions satisfassent à certaines conditions restrictives,

celle d'être bornées dans leur ensemble par exemple. On dit que des fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine d sont bornées dans leur ensemble dans ce domaine, si l'on a $|f(z)| < M$, M étant un nombre fixe, quelle que soit la fonction $f(z)$ et quel que soit z intérieur à d . Le théorème suivant dû à M. MONTEL établit alors l'existence de familles compactes, ou normales, de fonctions analytiques : Soit une famille de fonctions holomorphes et bornées dans leur ensemble dans un domaine d ; de toute suite infinie de cette famille on peut extraire une suite partielle qui converge uniformément dans chaque domaine intérieur à d vers une fonction limite (1). Dans le problème de représentation conforme dont nous nous occupons ici (2), la solution va être obtenue en construisant sur le domaine D une famille compacte de telle sorte qu'une fonction limite dont l'existence est impliquée par la compacité de la famille soit la fonction cherchée. La structure du domaine D n'est donc pas directement adaptée à la mise en évidence de la fonction cherchée $z = G(Z)$ mais nous allons voir comment cette structure est adaptée à la genèse du mixte intermédiaire : on recouvre le plan Z d'un quadrillage formé de carrés de côté égal à 1. On considère tous les carrés complètement intérieurs au domaine ; ils forment un domaine simplement connexe D_0 dont la frontière est un polygone rectiligne. On envisage ensuite le quadrillage de côté $\frac{1}{2}$ obtenu en conservant les lignes du quadrillage précédent, ce qui permet de définir de la même manière un domaine D_1 contenant tous les points de D_0 . Avec le quadrillage de côté $\frac{1}{2^n}$ on obtient de même un domaine D_n . La suite infinie de domaines $D_0, D_1 \dots D_n \dots$ est telle que : 1° chacun de ces domaines est complètement intérieur à D ; 2° D_n contient tous les points de D_{n-1} ; 3° tout

(1) Cf. P. MONTEL, *op. cit.*, p. 21.

(2) Cf. pour toute la suite : P. MONTEL, *op. cit.*, p. 98-102.

point intérieur à D est intérieur aux domaines D_n à partir d'un certain rang.

Le domaine D se laisse ainsi structurer en une infinité croissante de domaines limités par des polygones rectilignes: $D_0 \dots D_n \dots$. En vertu des théorèmes admis au début du paragraphe, il existe donc des fonctions $Z_0 = f_0(z)$, $Z_1 = f_1(z) \dots$, qui assurent la représentation conforme du cercle d sur chacun des domaines D_n ainsi définis. Les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes dans d , elles sont bornées puisque les valeurs de Z_n sont intérieures à D quel que soit n , elles forment donc une famille normale dans d .

Les équations définissant la correspondance peuvent être résolues par rapport à z , on en tire :

$$z = G_0(Z_0), z = G_1(Z_1) \dots z = G_n(Z_n).$$

Les fonctions $G_n(Z)$ sont holomorphes et bornées dans D_0 puisque les valeurs correspondantes sont les affixes des points intérieurs à d ; elles forment donc une famille normale dans D_0 , qui est véritablement le mixte essentiel de la théorie.

M. MONTEL démontre ensuite que l'on peut extraire de cette famille une suite partielle qui converge uniformément dans chaque domaine D_n . Soient $G(Z)$ la fonction limite de cette suite, et $f(z)$ la fonction inverse limite de la suite correspondante dans la famille des fonctions $f_n(z)$. La fonction $G(Z)$ assure la représentation conforme du domaine D sur le cercle d , et son existence est ainsi déterminée au sein de la famille normale définie sur le domaine de base.

Nous voyons ainsi comment la décomposition structurale de D peut être interprétée en termes d'existence, non pas de l'être cherché mais d'un mixte et comment c'est de la structure de ce mixte que résulte l'existence de cet être cherché. Une remarque s'impose. Dans le cas de l'espace de HILBERT la structure du mixte donnait naissance aux valeurs et aux fonctions propres cherchées par une décomposition interne

analogue à ces découpages et à ces divisions des domaines de bases étudiés au chapitre IV. Nous avons ici à faire à un schéma de genèse légèrement différent. La famille normale procède bien d'une sorte de décomposition du domaine de base, mais la fonction limite n'est plus liée à un mode de décomposition du mixte. Elle résulte d'une sélection que permet au sein de la famille normale la propriété des suites infinies partielles d'être convergentes. Ce point de vue nous amène à ceux auxquels nous nous placerons dans le chapitre suivant pour étudier dans leur ensemble les schémas de genèse où l'existence d'un être résulte de ce que cet être jouit de propriétés exceptionnelles qui permettent de le distinguer parmi les autres. Il n'en est pas moins vrai que dans le cas des familles normales, la sélection de la fonction limite est déterminée par la structure compacte de ces familles normales avec la même rigueur logique que l'existence des fonctions propres dans l'espace de HILBERT était liée aux possibilités de décomposition de cet espace.

Les deux problèmes que nous venons d'exposer rapidement nous montrent ainsi que la découverte de l'existence d'un être présuppose souvent l'existence d'un ensemble qui contienne l'être cherché avant même qu'on sache l'y voir. La construction de cet ensemble est en effet plus facile parce que sa nature s'adapte directement au domaine auquel il se superpose. Le problème des mixtes en mathématiques se divise donc en un problème d'imitation, le mixte imitant une structure de domaine, et un problème de sélection. Les mixtes se situent bien ainsi entre deux réalités à la nature de chacune desquelles ils participent.

CHAPITRE VI

Du caractère exceptionnel de l'existence.

Dans la plupart des problèmes étudiés au chapitre IV et au chapitre V, le passage de la structure du domaine à l'existence des êtres définis sur ce domaine résulte d'une décomposition structurale du domaine interprétable en termes d'existence par rapport à d'autres êtres, ceux qui sont créés sur ce domaine. Nous allons envisager maintenant un nouveau mode de liaison entre la structure et l'existence, celui où l'être cherché résulte de la sélection au sein d'un domaine d'un élément distingué parmi tous les autres par ses propriétés exceptionnelles. M. Maurice JANET a publié dans les *Recherches philosophiques* (1) un article extrêmement précieux sur des problèmes de cette sorte, les plus importants au point de vue philosophique : les propriétés exceptionnelles qui caractérisent l'existence de l'être cherché y sont en effet des propriétés extrémales de maximum ou de minimum. Cette détermination de l'existence par des recherches de maximum ou de minimum suggère à M. JANET les rapprochements qui s'imposent avec la pensée d'EULER et de LEIBNIZ. M. JANET cite ce texte d'EULER : « Comme la construction du monde est parfaite et due à un créateur infiniment sage, il n'arrive rien dans le monde qui ne présente quelque propriété de maximum ou de minimum. Aussi n'y a-t-il aucun

(1) M. JANET, *La finalité en mathématiques et en physique. Recherches philosophiques*, t. II, p. 1.

doute qu'il soit possible de déterminer tous les effets de l'univers par leur cause finale à l'aide de la méthode des maxima et des minima avec tout autant de succès que par leurs causes efficientes. » Ce texte exprime les mêmes idées que le fameux opuscule de LEIBNIZ sur l'origine radicale des choses : « par là on comprend de la manière la plus évidente, que parmi les combinaisons infinies des possibles..., il en existe une par laquelle la plus grande quantité d'essence ou de possibilité soit amenée à l'existence. Et en effet, il y a toujours dans les choses un principe de détermination qui doit se tirer du plus grand et du plus petit ou de manière que le plus grand effet s'obtienne avec la moindre dépense » (1). Il y a dans ce texte comme un double programme d'application du calcul des variations aux mathématiques et à la physique et l'on sait tout le succès des considérations variationnelles en physique. M. JANET refait rapidement l'historique du principe de FERMAT pour la lumière, du principe de MAUPERTUIS pour la mécanique et montre que l'analogie de ces deux principes de minimum domine tout le courant d'idées qui va de HAMILTON à M. Louis DE BROGLIE.

Nous entendons dans ce chapitre nous borner exclusivement aux mathématiques et voudrions montrer que dans la détermination de l'existence d'un être mathématique par des considérations d'extremum se réalise le schéma logique d'une solution nouvelle au problème du passage de l'essence à l'existence, où, comme dans les schémas des chapitres précédents, l'essence et l'existence portent sur des êtres mathématiques distincts. Lorsqu'on détermine un être par des propriétés de maximum ou de minimum, il faut en effet le considérer comme plongé au sein d'un ensemble et montrer ensuite que la structure de l'ensemble est telle qu'elle permet d'y distinguer l'être cherché. Dans la mesure où les

(1) LEIBNIZ, *De l'origine radicale des choses*. Ed. Janet, t. II, p. 546.

propriétés qui rendent la sélection possible sont des propriétés de maximum ou de minimum, elles confèrent bien à l'être obtenu un avantage de simplicité et comme une apparence de finalité, mais cette apparence disparaît lorsqu'on se rend compte que ce qui assure le passage à l'existence, ce n'est pas le fait que les propriétés en question sont des propriétés extrémales, c'est que la sélection qu'elles déterminent est impliquée par la structure de l'ensemble considéré. Nous verrons d'ailleurs comment il est d'autres propriétés exceptionnelles, bien différentes des propriétés extrémales et qui permettent également de distinguer un être au sein d'un ensemble ; dans tous ces cas nous nous attacherons à montrer comment la structure de l'ensemble était préparée à la mise en évidence de l'élément distingué. Le problème logique qui domine ces théories est donc bien encore ici celui des liaisons à établir entre la structure d'un domaine et l'existence d'êtres définis sur ce domaine, et il est pour nous essentiel de pouvoir observer dans les mathématiques des solutions différentes de ce même problème. Une des thèses essentielles de cet ouvrage affirme en effet la nécessité de séparer la conception supra-mathématique du problème des liaisons que soutiennent entre elles certaines notions et la découverte mathématique de ces liaisons effectives au sein d'une théorie. Les schémas de genèse par sélection sont bien distincts des schémas de genèse par décomposition et les uns et les autres opèrent pourtant le passage de l'essence du domaine à l'existence de fonctions définies sur ce domaine.

Nous allons envisager tout d'abord les deux problèmes qu'expose M. JANET : celui du problème de DIRICHLET et celui des valeurs propres d'un opérateur dans l'espace de HILBERT. Le problème de DIRICHLET consiste, étant donné un domaine D et une fonction continue sur les frontières de D , à démontrer qu'il existe une fonction V continue dans D ainsi que ses dérivées partielles de deux premiers

ordres, prenant sur la frontière de D des valeurs données et satisfaisant à l'équation de LAPLACE $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. RIEMANN avait utilisé le fait qu'une telle fonction rend minimum l'expression :

$$I(U) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

pour affirmer l'existence de cette fonction, admettant sans démonstration que l'intégrale $I(U)$ atteint effectivement son minimum. WEIERSTRASS a montré qu'il n'était pas du tout évident qu'une expression donnée atteigne effectivement son minimum de sorte que si la fonction cherchée existe elle jouit bien de la propriété minimale en question, mais le fait qu'elle en jouirait n'est pas suffisant pour en assurer l'existence. Il fallait avoir recours à d'autres procédés. Le principe de la méthode découverte par HILBERT consiste, comme dans le dernier exemple que nous avons exposé au Chapitre V, à interposer entre le domaine D et la solution V une famille de fonctions compacte, qui joue ici encore le rôle d'un mixte intermédiaire entre la structure du domaine et l'existence de la fonction. Rappelons qu'une famille de fonctions holomorphes et bornées dans leur ensemble dans un domaine D est compacte si de toute suite infinie de cette famille on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans chaque domaine intérieur à D vers une fonction limite. Le théorème qui affirme la compacité d'une suite de fonctions est donc en même temps théorème d'existence pour la fonction limite d'une suite convergente extraite de la famille et le fait que la fonction limite peut jouir en plus de propriétés extrémales n'intervient aucunement dans sa détermination. Voici le théorème d'existence dont nous empruntons l'énoncé à M. H. LEBESGUE : On suppose données des fonctions $u_1, u_2 \dots u_n \dots$, continues et monotones (ce qui veut dire qu'elles ont même limite inférieure et

même limite supérieure dans un domaine fermé et sur sa frontière, et ceci quel que soit le domaine considéré) dans un domaine D , toutes égales entre elles sur la frontière de D , ayant en tout point intérieur au domaine des dérivées partielles du 1^{er} ordre finies et continues, telles enfin que quel que soit i , l'expression :

$$I(u_i) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

ait un sens et soit inférieure à un nombre fini H , indépendant de i ; alors parmi les $u_1 \dots u_n \dots$, on peut choisir une suite qui converge uniformément vers une limite continue... (1). L'existence de la fonction cherchée est donc liée à la structure compacte de la famille de fonctions $u_1 \dots u_n \dots$ et la propriété exceptionnelle qui la distingue n'est plus une propriété d'extremum mais la propriété d'être la limite d'une suite convergente.

Des considérations analogues se dégagent de l'étude des valeurs propres d'un opérateur. On se rappelle qu'étant donné une expression $H(X, X) = \sum h_{ik} x_i x_k$, la détermination des valeurs propres de H revient à transformer l'expression $\sum h_{ik} x_i x_k$ en une somme de carrés $\sum \lambda_i y_i y_i$ par une transformation des vecteurs de base de l'espace de HILBERT. L'une des méthodes de détermination des valeurs propres λ_i est une méthode de maximum. Elle s'appuie sur le raisonnement suivant : Toute fonction réelle et continue de k variables réelles dans un domaine borné et fermé est uniformément continue. Donc elle est bornée, donc elle a un maximum atteint pour un point au moins du domaine des variables ou de sa frontière. On considère alors l'expression $H(X, X)$ comme une fonction de X , lorsque X est un vecteur quelconque satisfaisant à $|X^2| = 1$.

(1) H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, 1907, p. 386.

Le domaine de variation des coordonnées x_i de X est borné et fermé ; donc $H(X, X)$ est fonction réelle et continue des x_i dans ce domaine et présente un maximum λ_1 atteint pour $X = e_1$. On considère ensuite tous les vecteurs X , de longueur égale à 1, orthogonaux à e_1 . Les variables X décrivent encore un domaine borné et fermé dans lequel H atteint un maximum $\lambda_2 \leq \lambda_1$ pour $X = e_2$ et ainsi de suite (1). Le point essentiel du raisonnement est celui qui lie le fait que le domaine de variation des x_i est borné et fermé à l'existence d'un maximum de la fonction $H(X, X) = \sum h_{ik} \bar{x}_i x_k$ sur ce domaine. La valeur extrême n'apparaît chaque fois que parce que la structure du domaine est adaptée à sa mise en évidence, le schéma de genèse opère donc bien encore le passage de l'essence du domaine à l'existence du maximum.

Les méthodes de Poincaré.

Nous allons envisager maintenant des propriétés exceptionnelles qui vont permettre d'opérer sur un domaine des sélections bien différentes. Ce sont celles qui remontent aux méthodes inaugurées par POINCARÉ dans son mémoire : *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Ce mémoire a pour les questions logiques que nous étudions une importance capitale car c'est là que POINCARÉ a caractérisé l'aspect structural que devait prendre à ses yeux le problème moderne de l'intégration des équations différentielles. POINCARÉ n'y envisage encore en 1881 que la substitution du point de vue global au point de vue local, mais nous montrerons comment ces nouvelles méthodes l'ont conduit plus tard à déterminer l'existence de certaines solutions par leurs propriétés exceptionnelles. Voici les

(1) Résumé d'après G. JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques*, p. 191.

textes auxquels nous faisons allusion : « MM. FUCHS, BRIOT et BOUQUET, M^{me} KOWALEWSKA au lieu d'étudier la manière d'être des intégrales des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles pour toutes les valeurs de la variable, c'est-à-dire dans tout le plan, se sont d'abord occupés de déterminer les propriétés des intégrales dans le voisinage d'un point donné... » A cette méthode quantitative, POINCARÉ oppose une méthode qualitative : « Pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher à l'aide du théorème de STURM quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative ; puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même pour étudier une courbe algébrique on commence par construire cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches [de courbe fermées, les branches infinies, etc... Après cette étude qualitative, on peut ensuite déterminer exactement un certain nombre de points... (1) » Cette étude qualitative est donc essentiellement une étude topologique des courbes où l'on cherche à déterminer leurs cols, leurs nœuds, leurs foyers, leurs centres. Les courbes les plus importantes sont celles qui se présentent sous la forme de cycles fermés autour d'un centre. Leur importance mathématique vient de ce que leur connaissance détermine en même temps la connaissance des courbes qui leur sont voisines. Dans le cas d'équations différentielles du 1^{er} ordre à variables réelles, ce sont par exemple des spirales qui s'approchent asymptotiquement de cette limite. La signification physique des cycles fermés en mécanique céleste est évidente : ils correspondent à des trajectoires périodiques, c'est-à-dire à des astres qui restent stables sur leur orbite. On cherche généralement à déterminer ces solutions périodiques par des méthodes ana-

(1) H. POINCARÉ, *Œuvres complètes*, t. III, p. 56.

lytiques, mais le génie de POINCARÉ a su découvrir des méthodes de sélection infiniment plus simples, empruntées à la topologie. Nous allons résumer rapidement ces recherches d'après l'exposé de M. BIEBERBACH (I).

Les méthodes nouvelles de POINCARÉ qui nous intéressent ici portent sur les solutions d'équations différentielles en relation avec un problème du calcul des variations. Toutes ces solutions sont donc des extrémales par rapport à ce problème et il s'agit pour POINCARÉ de déterminer les extrémales fermées. Il est possible par des transformations assez simples de se représenter ces extrémales comme des courbes d'un espace à 3 dimensions dont certaines sont fermées, celles qui correspondent aux solutions périodiques et dont les autres s'enroulent une infinité de fois autour de ces courbes fermées. L'ensemble forme comme un faisceau de courbes dont on envisage l'intersection avec une surface à 2 dimensions. Les courbes fermées ne rencontrent cette surface qu'en un nombre fini de points ; on peut même arriver par un choix approprié des coordonnées à ce que les courbes fermées ne rencontrent la surface qu'en un point ; mais toutes les autres courbes enroulées une infinité de fois autour des cycles fermés rencontrent la surface d'intersection en un nombre infini de points. Cela étant, si l'on suit une courbe intérieure du faisceau à partir d'un de ses points de contact avec la surface jusqu'à sa rencontre avec un second point de la surface, et si l'on opère de la même façon pour toutes les courbes du faisceau, on opère une transformation de tous les points intérieurs de la surface d'intersection, qui fait correspondre à chaque point a le plus proche point d'intersection a' de la courbe passant par a avec la surface ; seuls les points correspondant aux courbes fermées restent fixes dans cette transformation. (Une propriété caractéristique de cette transformation est de laisser invariante une

(I) L. BIEBERBACH, *Differentialgleichungen*, p. 202.

certaine expression intégrale.) Le problème de la détermination des solutions périodiques est donc ramené à la détermination des points d'un domaine qui restent fixes lorsqu'on opère une transformation sur tous les points intérieurs de ce domaine. Nous voyons ainsi apparaître une propriété exceptionnelle nouvelle, celle des points fixes dont l'existence est immédiatement interprétable en termes d'existence de solutions périodiques d'équations différentielles. Il nous faut maintenant montrer comment l'existence de ces points fixes est liée à la structure du domaine sur lequel a lieu la transformation interne.

POINCARÉ avait énoncé peu avant sa mort un théorème dont M. BIRKHOFF devait donner quelques mois après la démonstration. Voici ce « dernier théorème » de POINCARÉ : Si une transformation continue bi-univoque conservant les aires transforme un anneau en lui-même, en réalisant deux rotations de sens inverses pour les deux circonférences bornes de l'anneau, il existe toujours à l'intérieur de l'anneau deux points qui ne sont pas altérés par la transformation (1).

Les conditions d'existence des points fixes ne dépendent pas seulement dans cet énoncé, de la structure du domaine de base, elles dépendent aussi de la nature de la transformation interne opérée puisque cette transformation doit conserver un invariant intégral de surface ; le développement récent de la topologie a permis, pour la plupart des domaines topologiques, de déterminer par la seule considération de la structure topologique de ces domaines si une transformation interne de leurs points admet ou non des points fixes. On sait que parmi les caractéristiques structurales d'un complexe figurent en premier lieu les nombres de BETTI de ce complexe (voir plus haut page 54), c'est-à-dire le nombre

(1) Voir POINCARÉ, *Sur un théorème de géométrie. Rend. di Palermo*, 1912 ; HUSSON, *Les trajectoires de la dynamique. Mémoires des Sc. Math.*, fasc. 55, p. 50 et BIEBERBACH, *Differentialgleichungen*, p. 205.

maximum de cycles linéairement indépendants de la dimension 0, de la dimension 1, ... de la dimension n , n étant la dimension du complexe. Il est alors possible, grâce aux formules obtenues par MM. HOPF et LEFSCHETZ de déterminer l'existence ou l'absence de points fixes d'une transformation interne par la seule considération des nombres de BETTI. Voici quelques résultats qui sont à cet égard significatifs : soit P un polyèdre d'un seul tenant dont tous les nombres de BETTI sont nuls à l'exception de celui de la dimension 0 ($p_0 = 1$). Toute transformation interne de ce polyèdre en lui-même admet au moins un point fixe. Soit N la caractéristique d'EULER d'un complexe, c'est-à-dire un invariant de structure de ce complexe, qui est égal à la somme algébrique des nombres de BETTI du complexe.
$$[-N = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k p^k].$$
 Pour qu'une transformation interne d'un complexe, réductible à l'identité par déformation continue, admette des points fixes, il suffit que la caractéristique d'EULER du complexe soit différente de 0 (1), etc. Tous ces théorèmes montrent comment l'existence des points fixes d'une transformation interne est impliquée par les invariants de structure du complexe. Il y a une analogie étroite entre l'affirmation d'existence du maximum d'une fonction sur un domaine à partir du fait que le domaine est borné et fermé et l'affirmation d'existence de points fixes à partir du fait que la constante d'EULER du complexe est différente de 0 ; si l'on abstrait de ces théorèmes le schéma logique qu'ils dessinent, on obtient un schéma de genèse, de l'essence du domaine à l'existence de l'être distingué sur ce domaine, aussi caractérisé que pouvaient l'être les schémas de genèse qui établissaient un lien entre la décomposition et l'existence.

(1) Voir pour tout ceci : SEIFERT und THRELFALL, *Topologie*, p. 290 ; ou : ALEXANDROFF und HOPF, *Topologie*, p. 532.

Les singularités des fonctions analytiques.

POINCARÉ considérait, avons-nous vu page 131, que l'étude qualitative de l'allure des courbes intégrales s'opposait aux procédés de ses prédécesseurs qui se préoccupaient d'abord d'étudier la nature de la solution au voisinage d'un point donné. On peut pourtant montrer que la connaissance de la valeur d'une solution autour de certains points permet également de caractériser de façon globale la fonction qui est intégrale d'une équation proposée, parce que les points choisis ne sont pas quelconques ; ils correspondent en effet aux singularités des solutions. Les points singuliers sont bien en tant que points, points du domaine de base comme tout autre point de ce domaine, mais ils ont de plus en plus, dans les théories modernes un rôle dominateur et exceptionnel ; nous allons rapidement voir qu'en eux viennent se confondre un grand nombre de points de vue logiques que nous avons caractérisés séparément au cours de ce travail.

Soit l'équation différentielle $w'' + p_1(z) w' + p_2(z) w = 0$, dont les coefficients $p_1(z)$ et $p_2(z)$ ont au point a une singularité isolée. On démontre que toute solution de l'équation peut être obtenue en n'importe quel point régulier du domaine de la variable z par combinaison linéaire de deux solutions particulières indépendantes $w_1(z)$ et $w_2(z)$, formant ce qu'on appelle un système fondamental. Il s'agit donc avant tout de déterminer deux solutions fondamentales de l'équation et ceci va être fait tout d'abord au voisinage du point singulier. Pour déterminer ces deux solutions fondamentales dans les cas les plus simples, admettons que les coefficients $p_1(z)$ et $p_2(z)$ n'aient en a que des pôles qui soient respectivement du premier et du second ordre, c'est-à-dire que l'on ait :

$$p_1(z) = \frac{P_1(z-a)}{z-a} \text{ et } p_2(z) = \frac{P_2(z-a)}{(z-a)^2}.$$

Dans ces conditions, l'équation :

$$w'' + w' \frac{P_1(z-a)}{z-a} + w \frac{P_2(z-a)}{(z-a)^2} = 0$$

admet toujours au voisinage du point $z = a$ un système fondamental de la forme :

$$w_1 = (z-a)^{l_1} P(z-a)$$

$$w_2 = (z-a)^{l_2} P^*(z-a) + \text{éventuellement un terme logarithmique.}$$

Les nombres l_1 et l_2 sont racines d'une équation dite équation fondamentale, formée avec les premiers coefficients du développement en série de $P_1(z-a)$ et de $P_2(z-a)$. Si une équation admet plusieurs points singuliers, la même méthode s'applique : il faut déterminer au voisinage de chacun d'eux un système de deux solutions fondamentales. Le passage des solutions w_1 et w_2 définies au voisinage de points singuliers aux solutions définies en chaque point régulier se fait selon les idées de WEIERSTRASS par prolongement analytique. Nous allons voir comment ces solutions locales sont néanmoins susceptibles de caractériser une fonction globalement. Les cas que nous allons envisager sont ceux des fonctions admettant 3 points singuliers : les points 0, 1 et ∞ . On peut en effet toujours obtenir par une transformation linéaire que les singularités se produisent à ces points là. Considérons le plan de la variable complexe z entaillé sur l'axe réel de 0 à $-\infty$ et de 1 à $+\infty$. Le prolongement à partir d'une solution locale ne peut donc jamais entourer plus d'un point singulier à la fois. Soient w_1 et w_2 un système fondamental correspondant au point singulier $z = 0$. Soit w le quotient $\frac{w_1}{w_2}$. On démontre que la fonction $w(z)$ assure la représentation conforme du demi-

plan supérieur de la variable complexe z sur un triangle curviligne du plan de la variable w . Si l'on cherche ensuite à prolonger la fonction $w(z)$ sur le demi-plan inférieur de la variable z on obtient un triangle curviligne du plan des w qui a un côté commun avec le premier et en répétant indéfiniment le prolongement de la fonction $w(z)$ d'un demi-plan à l'autre de la variable z , on obtient une infinité de triangles curvilignes qui dans certains cas tend à recouvrir complètement tous les points situés à l'intérieur d'un cercle fondamental du plan des w . C'est ainsi que l'on peut obtenir par exemple sur le plan w la figure ci-contre dite figure modulaire.

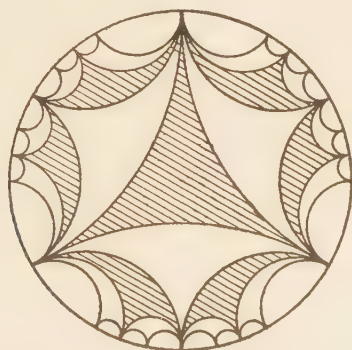


FIG. 8 (d'après la figure 104 de HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*).

La fonction $w(z)$ opère donc la représentation du plan z (I) sur cette figure modulaire, et sa fonction inverse, $z(w)$, dite fonction modulaire opère inversement la représentation de la figure modulaire sur le plan complexe z .

Si l'on rappelle que le point de vue global en théorie des fonctions analytiques est celui qui considère une fonction $\zeta = f(z)$ comme opérant la représentation du domaine de

(I) Ou plutôt de la surface de RIEMANN obtenue par la superposition sur le plan des z , d'une infinité de plans soudés en croix le long des coupures $0 \rightarrow -\infty$ et $1 \rightarrow +\infty$.

la variable z sur le domaine de la variable ζ , on voit que les fonctions $w(z)$ et $z(w)$ définies à partir des solutions locales d'une équation différentielle n'en prennent pas moins immédiatement place dans la théorie riemannienne. Du reste une de leurs propriétés accentue encore le caractère global du résultat obtenu : Nous avons montré au Chapitre III que la surface universelle de recouvrement correspondant à une fonction algébrique $\zeta = f(z)$ donnée était en ce sens achevée, qu'il existait toujours sur cette surface une fonction t telle que les fonctions $\zeta = \varphi(t)$ et $z = \psi(t)$ soient uniformes. Or ces fonctions sont des fonctions automorphes, c'est-à-dire qu'elles conservent la même valeur pour certaines transformations de la variable t : $\varphi\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = \varphi(t)$; $\psi\left(\frac{\alpha t + \gamma}{\gamma t + \delta}\right) = \psi(t)$. Il se trouve alors que la fonction modulaire, obtenue à partir d'un système de solutions purement local, est du type de ces fonctions automorphes qui uniformisent globalement les fonctions algébriques (1).

Nous voyons donc les aspects multiples sous lesquels se présentent dans cette théorie les points singuliers : 1^o ils permettent la détermination d'un système fondamental de solutions, prolongeables analytiquement sur tout chemin ne rencontrant pas de singularités : c'est en ce sens que leur singularité se traduit en termes d'existence des solutions ; 2^o ils permettent un découpage structural du plan complexe tel qu'il puisse exister une fonction qui représente le plan pareillement découpé sur la figure modulaire. En ce sens leur rôle est de décomposer un domaine de façon que la fonction qui assure la représentation soit définissable sur ce domaine ; 3^o ils permettent le passage de l'intégration locale des équations différentielles à la caractérisation

(1) Voir pour tout ce paragraphe : BIEBERBACH, *Differentialgleichungen*, p. 227 sqq.

globale des fonctions analytiques qui sont solutions de ces équations. Nous annonçons plus haut qu'un grand nombre des notions logiques que nous avons étudiées séparément se rencontraient mêlées, dans les problèmes relatifs aux points singuliers : nous voyons en effet le rôle qu'ils jouent du point de vue de la synthèse du local et du global (Chap. I), du point de vue de la liaison entre la décomposition structurale d'un domaine et l'existence de fonctions sur ce domaine (Chap. IV) et enfin comment leur nature de points singuliers sur un domaine détermine l'existence, en chaque point du domaine de la variable z , de solutions de l'équation proposée, au même titre que les maxima ou les minima étudiés au début de ce chapitre entraînent dans d'autres cas l'existence de solutions propres.

Cette rencontre de points de vue logiques distincts, au sein d'un même problème, nous l'avons bien souvent constatée dans les chapitres précédents : elle nous montre à la fois, aussi paradoxal que puisse être le rapprochement des termes, l'union intime et l'indépendance complète de la logique dialectique, telle que nous la concevons et des mathématiques. Les théories mathématiques se développent par leur force propre, dans une étroite solidarité réciproque et sans référence aucune aux Idées que leur mouvement rapproche. Les schémas logiques que le philosophe découvre alors dans ce mouvement ne peuvent avoir la netteté de contours qu'auraient des règles données antérieurement à l'expérience, ils n'ont d'existence qu'unis à ces théories qui se font en même temps qu'eux, et s'ils empiètent tous les uns sur les autres, c'est pour pouvoir mieux soutenir le magnifique et universel réseau des relations mathématiques.

CONCLUSION

Les études qui précèdent vont nous permettre de proposer une réponse au problème que nous avons envisagé dans notre introduction. Cherchant à définir la nature du réel mathématique, nous allons examiner tout d'abord les solutions possibles du problème. On peut définir la nature de la réalité mathématique de quatre points de vue différents : le réel, ce sont tantôt les faits mathématiques, tantôt les êtres mathématiques, tantôt les théories et tantôt les Idées qui dominent ces théories. Loin de s'opposer, ces quatre conceptions s'intègrent naturellement les unes dans les autres : les faits consistent dans la découverte d'êtres nouveaux, ces êtres s'organisent en théories et le mouvement de ces théories incarne le schéma des liaisons de certaines Idées.

On trouve les deux premiers points de vue adoptés dans le livre de P. BOUTROUX : *L'Idéal scientifique des mathématiciens*. Dans son chapitre sur l'analyse mathématique au XIX^e siècle, BOUTROUX situe la réalité mathématique dans la résistance que la matière mathématique oppose à la logique avec laquelle on essaie de la décrire, et dans le hasard de la découverte d'une piste nouvelle qui permet de surmonter l'obstacle rencontré. Ainsi par exemple, étudiant le problème de l'intégration, BOUTROUX montre que la découverte des fonctions elliptiques, des fonctions abéliennes, des fonctions automorphes, est due au fait que certaines intégrales définies ou certaines équations différentielles ne

se laissent pas intégrer avec les méthodes qui réussissent dans les cas plus simples. M. WINTER développe des idées analogues : l'expression $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ se laisse intégrer au moyen de fonctions élémentaires si $R(x)$ est un polynôme du premier ou du deuxième degré ; si $R(x)$ est du troisième ou du quatrième degré, on a affaire à une transcendante nouvelle : « Il suffit que le degré du polynôme contenu sous le radical au dénominateur augmente d'une unité, pour que brusquement, on se trouve en présence d'une transcendante nouvelle qui exigera des études spéciales considérables... Voilà un fait, semble-t-il, dont la logique formelle ne peut rendre compte (1). »

Cette définition des faits mathématiques est ainsi intimement solidaire de la découverte d'êtres nouveaux et BOUTROUX adopte dans son chapitre sur *l'objectivité des faits mathématiques* un point de vue beaucoup plus conceptualiste. Voici une même phrase où les deux points de vue sont reconnaissables, sans que peut-être BOUTROUX y ait voulu établir de différences : « Afin de rendre compte de cette résistance opposée par la matière mathématique à la volonté du savant, nous sommes obligés de supposer l'existence de *faits mathématiques* indépendants de la construction scientifique ; nous sommes forcés d'attribuer une objectivité véritable aux *notions* mathématiques (2). » Les faits s'organisent ainsi sous l'unité de la notion qui les résume, le réel cesse d'être la pure découverte du fait nouveau et imprévisible, pour dépendre de l'intuition globale d'un être supra-sensible. BOUTROUX prend comme exemple la réalité de l'ellipse. L'ellipse n'est pour lui ni le lieu des

(1) M. WINTER, *La méthode dans la philosophie des mathématiques*, p. 85.

(2) P. BOUTROUX, *op. cit.*, p. 203. (Les deux termes soulignés (le second par nous) montrent bien que Boutroux rapproche deux conceptions différentes de la réalité mathématique.)

points tels que la somme de leurs distances aux foyers soit constante, ni une courbe définie par son équation algébrique, ni une courbe aux propriétés projectives des coniques ; elle est tout cela et bien plus encore ; c'est, nous dit-il, « un tout qui ne comporte pas de parties,... une sorte de monade leibnizienne. Cette monade est grosse des propriétés de l'ellipse ; je veux dire que ces propriétés, alors même qu'elles n'ont pas été explicitement formulées (et elles ne sauraient l'être puisqu'elles sont en nombre infini) sont contenues dans la notion d'ellipse (1). » Il faut avouer que la pensée de BOUTROUX est dans la suite du chapitre assez difficile à préciser. L'exemple de l'ellipse tend bien à montrer que la réalité des êtres mathématiques existe pour lui dans l'intuition, indépendamment de la façon dont les propriétés de ces êtres sont présentées logiquement, et il refuse pourtant d'admettre que les difficultés de l'exposition logique soient extérieures à la réalité propre des mathématiques. Ce sont là deux attitudes qui semblent bien encore une fois s'opposer et voici pourtant un passage où l'on peut trouver à la fois l'une et l'autre : « Que l'idée d'intuition pure, séparée du raisonnement logique, soulève des difficultés, cela est indéniable et il serait fort souhaitable de pouvoir supprimer ces difficultés en en extirpant la racine. Mais la distinction de tendances opposées, dans l'œuvre mathématique, nous paraît devoir être maintenue sous une forme ou sous une autre ; et nous ne saurions croire qu'elle a été uniquement imaginée pour les besoins de la discussion engagée par les logisticiens (2). » Nous ne pouvons comprendre pourquoi il serait souhaitable de séparer l'intuition du raisonnement si cette dualité est inhérente à la nature même des mathématiques.

La source de ces difficultés nous paraît résider dans deux

(1) P. BOUTROUX, *op. cit.*, p. 208.

(2) P. BOUTROUX, *op. cit.*, p. 228.

opinions de BOUTROUX que nous voudrions discuter. La première est relative au pouvoir qu'aurait l'intuition de nous révéler l'existence et l'objectivité des êtres mathématiques. Si l'exemple de l'ellipse a dans sa pensée une portée générale, (et tout indique dans le texte qu'il en est ainsi), BOUTROUX semble affirmer, comme allant de soi, une solidarité des propriétés locales et des propriétés globales d'un être alors que la mise en évidence de cette solidarité n'est possible, dans la plupart des cas, comme nous l'avons montré au chapitre I, que lorsque les êtres en question jouissent de certaines propriétés de fermeture ou d'achèvement. Reprenons par exemple le cas d'une surface fermée à courbure constante ; le signe de cette courbure est déterminable par les propriétés topologiques globales de la surface (sa caractéristique d'EULER) (1). Il n'existe aucun théorème de ce genre pour des surfaces ouvertes ; si donc la réalité des êtres mathématiques résidait dans cette harmonie interne, une distinction s'établirait entre les surfaces, les ensembles, les groupes ; certains existeraient « plus réellement » que d'autres et l'on verrait reparaître en topologie des distinctions analogues à celles qui ont prévalu longtemps, dans l'histoire des mathématiques, entre les bonnes et mauvaises fonctions, les bonnes et les mauvaises racines.

Il existe pourtant un point de vue par rapport auquel les multiplicités qui sont soit achevées, soit complètes, soit fermées, closes ou compactes, jouissent d'un privilège sur celles qui ne le sont pas ; c'est qu'on ramène le plus souvent l'étude de ces dernières à l'étude des premières. Nous allons en donner deux exemples : Nous avons montré au chapitre II comment les propriétés structurales d'un complexe fermé Q étaient en dualité avec celles de son espace complémentaire $R^n - Q$. Or si Q est fermé, $R^n - Q$ est ouvert, de telle sorte que les théorèmes de dualité permettent de ramener

(1) Voir plus haut, p. 33.

partiellement l'étude de certains complexes ouverts à celle de complexes fermés. Voici un autre exemple : M. CARTAN, constituant la théorie des espaces de RIEMANN symétriques, irréductibles et non-euclidiens, étudie d'abord les espaces clos, et associe ensuite à chaque espace ouvert un espace clos, de sorte que l'étude des espaces ouverts est complètement déterminée par celle des espaces clos (1). On peut comparer ces procédés à ceux qu'on emploie dans la résolution des systèmes d'équations linéaires. On résout d'abord le système homogène, et l'on ramène l'étude du système non homogène à celle du système homogène correspondant. La réalité mathématique ne réside donc pas dans les différences qui sépareraient les êtres achevés des êtres inachevés, les êtres parfaits des êtres imparfaits ; elle réside plutôt dans la possibilité de déterminer les uns à partir des autres, c'est-à-dire dans la théorie mathématique où s'affirment ces liaisons. On voit ainsi que la réalité en question n'est pas celle d'êtres statiques, objets de pure contemplation ; s'il existe dans les mathématiques des distinctions qualitatives, elles caractérisent les théories et non les êtres.

Nous allons aboutir à une même conclusion en discutant une autre idée de BOUTROUX, celle de l'indépendance des êtres mathématiques par rapport aux théories où ils sont définis. BOUTROUX écrit : « Le fait mathématique est indépendant du vêtement logique ou algébrique sous lequel nous cherchons à le représenter » et plus loin « les faits mathématiques sont totalement indifférents à l'ordre dans lequel on les obtient » (2). BOUTROUX a surtout en vue l'analyse ou la géométrie du XIX^e siècle. Il est évident qu'en géométrie euclidienne, une ellipse est ou n'est pas, et qu'elle possède toutes ses propriétés aussitôt qu'elle est définie d'une façon quel-

(1) E. CARTAN, *La théorie des groupes et l'Analysis situs*, p. 51.

(2) P. BOUTROUX, *op. cit.*, p. 203-205.

conque. Par contre, dans les théories algébriques modernes, on peut envisager des êtres susceptibles d'appartenir à des domaines de base distincts, et dont les propriétés varient avec le domaine où on les considère. Il est alors impossible de considérer de pareils « faits mathématiques », au sens de BOUTROUX, indépendamment des axiomes qui définissent les domaines de base en question, et ces axiomes constituent cependant ce à quoi BOUTROUX ne veut reconnaître que le caractère accessoire « d'un vêtement logique ou algébrique ». Nous trouvons là au contraire une dépendance essentielle entre les propriétés d'un être mathématique et l'axiomatique du domaine auquel il appartient ; nous ne la décrirons pas longuement, car nous avons étudié dans notre thèse complémentaire les aspects principaux de cette « Abhängigkeit vom Grundkörper » des auteurs allemands, et nous nous contenterons de la montrer sur un exemple. Soit à étudier les propriétés de divisibilité du nombre 21 . Si l'on considère comme corps de base, le corps K des nombres rationnels, 21 n'est décomposable que d'une façon en un produit de facteurs premiers: $21 = 3 \times 7$. Si l'on considère comme corps de base, le corps $K(\sqrt{-5})$ obtenu par adjonction de $\sqrt{-5}$ au corps K des nombres rationnels, on obtient deux décompositions différentes de 21 en un produit de facteurs premiers :

$$21 = 3 \times 7 \text{ et } 21 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5}).$$

Les propriétés du nombre 21 ne sont donc pas toutes données avec la simple construction de ce nombre ; on ne peut les étudier qu'au sein du corps où le nombre est plongé, et ceci fait intervenir toute l'axiomatique de la théorie des corps algébriques et de leurs extensions successives.

Que ce soit donc en étudiant les relations qui unissent certains êtres à d'autres êtres ou certains êtres à certains axiomes, nous voyons que le problème de la réalité mathématique ne se pose ni au niveau des faits, ni à celui des

êtres, mais à celui des théories. A ce niveau, la nature du réel se dédouble ; nous avons montré en effet au cours des chapitres qui précèdent comment les théories mathématiques sont susceptibles d'une double caractérisation, l'une qui porte sur le mouvement propre de ces théories, l'autre sur les liaisons d'idées qui s'incarnent dans ce mouvement. Ce sont là deux éléments distincts dont la réunion constitue à notre avis la réalité inhérente aux mathématiques et nous allons montrer de quelle façon cette réunion nous paraît possible.

La lecture des *Etapas de la philosophie mathématique* enseigne au philosophe à associer de façon indissoluble l'élaboration, ou même seulement la compréhension des théories mathématiques, et l'expérience que l'intelligence y fait de son propre pouvoir. Toute tentative logique qui prétendrait dominer *a priori* le développement des mathématiques, méconnaît donc la nature essentielle de la vérité mathématique, car celle-ci est liée à l'activité créatrice de l'esprit, et participe de son caractère temporel. Il est par contre indiscutable que depuis le développement des géométries non-euclidiennes, les mathématiques ne se présentent pas comme une extension indéfiniment progressive et unifiante ; les théories y font plutôt figure d'unités organiques, et se prêtent à ces considérations métamathématiques globales qu'annonce l'œuvre d'HILBERT. Le point de vue s'affirme peu à peu d'une mathématique nouvelle, qui substitue aux procédés infinitistes de l'analyse du XIX^e siècle, les schémas structuraux de l'algèbre ou de la topologie. Nous avons décrit ailleurs cette évolution moderne des mathématiques et la pénétration progressive des méthodes du fini dans l'infini. Nous n'en retiendrons ici que l'idée d'une mathématique « qualitative » au sens de POINCARÉ ou « intégrale » au sens de F. SEVERI, se développant autour de schémas logiques de structure.

Notre tâche est donc de concilier l'irréductibilité des ma-

thématiques à une logique *a priori* et leur organisation autour de pareils schémas logiques. Nous allons pour cela essayer de montrer qu'il est possible de concevoir ce que nous appellerons l'urgence d'un problème logique, sans que la conscience de cette urgence implique aucunement un essai de solution. On peut même dire qu'une dialectique qui s'engagerait dans la détermination des solutions que ces problèmes logiques peuvent comporter, se verrait entraînée à constituer tout un ensemble de distinctions subtiles et d'artifices de raisonnement qui imiteraient à ce point les mathématiques, qu'elle se confondrait avec les mathématiques elles-mêmes. Tel est le sort de la logique mathématique dans ses développements les plus récents. Il est possible de concevoir ce qu'est le problème de la non-contradiction de l'arithmétique sans refaire toute l'arithmétique, mais dès qu'on essaie d'établir une démonstration effective de non-contradiction de l'arithmétique, on est obligé d'employer dans cette démonstration des moyens mathématiques qui dépassent en richesse ceux de la théorie dont on cherche à garantir la validité. Ces résultats, dus à K. GÖDEL montrent de façon définitive que la non-contradiction de l'arithmétique ne se laisse pas ramener à la non-contradiction d'une théorie plus simple et, dans l'état actuel de la science toute démonstration métamathématique de la non-contradiction de l'arithmétique emploie forcément des moyens transfinis. Il semblait donc que ce problème eût perdu tout intérêt logique jusqu'à ce que M. GENTZEN ait su l'envisager sous un autre aspect : « Il est parfaitement concevable, écrit-il que l'on démontre la non-contradiction de l'arithmétique avec des moyens qui dépassent l'arithmétique mais qui néanmoins peuvent passer pour plus assurés que les parties discutables de l'arithmétique pure elle-même (1). »

(1) G. GENTZEN, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann.*, t. 112, p. 500. Voir pour les travaux de K. GÖDEL et de G. GENTZEN l'ouvrage de J. CAVAILLÈS, cité plus haut p. 83.

On voit de cette façon comment le problème de la non-contradiction a un sens, alors même que l'on ignorerait les moyens mathématiques nécessaires pour le résoudre.

Il nous semble qu'il en est ainsi pour tous les problèmes logiques que nous avons successivement considérés. Les schémas logiques que nous avons décrits ne sont pas antérieurs à leur réalisation au sein d'une théorie ; il manque en effet, à ce que nous appelons plus haut l'intuition extramathématique de l'urgence d'un problème logique, une matière à dominer pour que l'idée de relations possibles donne naissance au schéma de relations véritables. Le sort du problème des rapports du tout et de la partie, de la réduction des propriétés extrinsèques en propriétés intrinsèques, de la montée vers l'achèvement, la constitution de nouveaux schémas de genèse dépendent du progrès des mathématiques elles-mêmes ; le philosophe n'a ni à dégager de lois ni à prévoir une évolution future ; son rôle consiste uniquement à prendre conscience du drame logique qui se joue au sein des théories. Le seul élément *a priori* que nous concevions est donné dans l'expérience de cette urgence des problèmes, antérieure à la découverte de leurs solutions.

Il nous faut maintenant préciser la nature de l'*a priori* que nous introduisons ainsi dans la philosophie des mathématiques. Nous ne prétendons nullement soutenir que les idées des problèmes logiques que les mathématiques résolvent, puissent être déduites systématiquement selon les exigences d'un idéalisme rationaliste. Nous entendons cet *a priori* dans un sens purement relatif, et par rapport aux mathématiques ; c'est uniquement la possibilité d'éprouver le souci d'un mode de liaison entre deux idées et de décrire phénoménologiquement ce souci, indépendamment du fait que la liaison cherchée peut être ou n'être pas opérable. Certains de ces « soucis » logiques se trouvent dans l'histoire de la philosophie, comme par exemple le souci des liaisons entre le même et l'autre, le tout et la partie, le continu

et le discontinu, l'essence et l'existence ; mais les théories mathématiques pourront inversement faire naître l'idée de problèmes nouveaux qui n'auraient pas été formulés abstraitement auparavant. La philosophie mathématique, telle que nous la concevons, ne consiste donc pas tant à retrouver un problème logique de la métaphysique classique au sein d'une théorie mathématique, qu'à appréhender globalement la structure de cette théorie pour dégager le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence même de cette théorie. Une expérience spirituelle est ainsi de nouveau attachée à l'effort de l'intelligence pour créer ou comprendre, mais cette expérience a un autre contenu que la mathématique qui se fait en même temps qu'elle. Elle n'est pas non plus seulement la conscience du pouvoir infini de la pensée ; au delà des conditions temporelles de l'activité mathématique, mais au sein même de cette activité, apparaissent les contours d'une réalité idéale qui est dominatrice par rapport à une matière mathématique qu'elle anime, et qui pourtant, sans cette matière, ne saurait révéler toute la richesse de son pouvoir formateur.

Nous voudrions montrer, avant de conclure, comment cette conception d'une réalité idéale, supérieure aux mathématiques et pourtant si prête à s'incarner dans leur mouvement, vient s'intégrer dans les interprétations les plus autorisées du platonisme. Certaines explications historiques sont à ce sujet indispensables, étant donné le sens que reçoit généralement l'expression de platonisme en mathématiques. Dans le débat ouvert entre formalistes et intuitionistes, depuis la découverte du transfini, les mathématiciens ont pris l'habitude de désigner sommairement sous le nom de platonisme toute philosophie pour laquelle l'existence d'un être mathématique est tenue pour assurée, alors même que cet être ne pourrait être construit en un nombre fini d'étapes. Il va sans dire que c'est là une connaissance superficielle du platonisme, et que nous ne sau-

rions nous référer à elle. Tous les commentateurs modernes de PLATON ont au contraire insisté sur le fait que les Idées ne sont pas les essences immobiles et irréductibles d'un monde intelligible, mais qu'elles sont liées les unes aux autres selon les schèmes d'une dialectique supérieure qui préside à leur venue. Les travaux de L. ROBIN, de STENZEL, de BECKER ont à cet égard apporté une clarté considérable sur le rôle dominateur des Idées-nombres en ce qui concerne aussi bien le devenir des nombres que celui des Idées. L'Un et la Dyade engendrent les Idées-nombres par un processus successivement répété de division de l'Unité en deux nouvelles unités. Les Idées-nombres se présentent ainsi comme des schémas géométriques de combinaisons d'unités (1),

(1) Nous nous rapportons ici à l'interprétation que donne BECKER des fameux textes aristotéliens relatifs aux Idées-nombres. (O. BECKER : *Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen*, dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Bd I, p. 464 sqq.). STENZEL avait proposé pour la génération des nombres à partir de l'un et de la dyade, le schéma suivant :

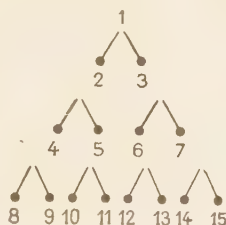


FIG. 9.

Ce schéma a pour BECKER plusieurs défauts essentiels. Tout d'abord seuls les nombres pairs y sont véritablement engendrés par division ; les nombres impairs résultant de l'addition d'une unité au nombre pair précédent. De plus, la distinction des Idées-nombres et des nombres ordinaires n'y est pas clairement expliquée.

BECKER associe à chaque Idée-nombre les schémas suivants :

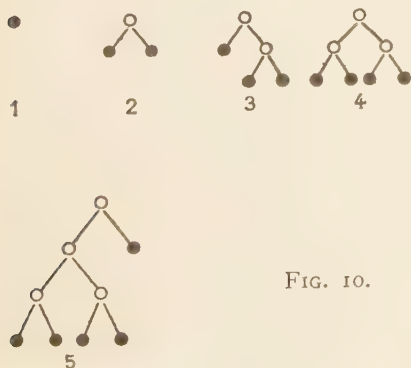


FIG. 10.

Chaque schéma est composé d'unités. Certaines de ces unités sont actuelles dans les nombres ordinaires (elles sont représentées par des cercles noirs), d'autres y sont cachées (les cercles blancs) mais toutes résultent du dédoublement d'une unité située plus haut. Le nombre idéal est ainsi le schéma qui engendre un nombre arithmétique au moyen d'unités actuelles et d'unités cachées (ce qui expliquerait, d'après BECKER, le texte mystérieux de la *Métaphysique* M. 7. 1081. A : dans la Dyade, il y a une troisième unité, dans la triade une quatrième et une cinquième...)

susceptibles de constituer aussi bien les nombres arithmétiques que les Idées au sens ordinaire. Les Idées-nombres constituent donc, comme le dit STENZEL, les principes qui servent à la fois à « ordonner dialectiquement les unités arithmétiques à la place qui leur convient dans le système, et à expliciter les différents degrés de la division progressive des Idées » (1). Les schémas de division des Idées dans le *Scphiste* s'organisent ainsi selon les mêmes plans que les schémas de génération des nombres ; les uns et les autres permettent de remonter à une « métamathématique » (2) qui est supérieure à la fois aux Idées et aux nombres.

L'existence des Idées-nombres, dominatrices par rapport aux nombres arithmétiques, a donc pour conséquence de commander une génération des nombres comme des Idées, qui, pour n'être pas dans le temps du monde créé, ne se produit pas moins selon un ordre de l'antérieur et du postérieur. M. ROBIN a montré comment la constitution des corps dans le *Timée* suppose une matière qui ait déjà été, avant l'existence du monde, le réceptacle d'une qualification géométrique. « Il y a donc, écrit-il, une génération et un devenir antérieurement à la génération et au devenir du monde (3). » L'introduction du devenir au sein des Idées prend toute sa valeur dans l'ouvrage de STENZEL, à la lumière du texte de *l'Ethique à Nicomaque* (Livre I, ch. IV, cité par STENZEL, *op. cit.*, p. 118) où ARISTOTE dit que les Platoniciens n'admettaient pas d'idées des nombres parce qu'ils n'admettaient pas d'idées des choses dans lesquelles il existe de l'avant et de l'après. STENZEL donne de ce texte une explication dont on ne saurait exagérer l'importance : les

(1) J. STENZEL, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1933, p. 117.

(2) Pour l'application de ce terme à la philosophie de Platon, cf. L. ROBIN, *Platon*, p. 149.

(3) L. ROBIN, *Platon*, p. 235.

nombres idéaux étant le principe de détermination des essences selon l'ordre de l'avant et de l'après, il n'est pas possible qu'il y ait des « nombres de nombres », c'est-à-dire « un principe de la division des essences qui soit supérieur à cette division nombrante elle-même » (1). La métamathématique qui s'incarne dans la génération des idées et des nombres ne saurait donner lieu à son tour à une méta-métamathématique ; la régression s'arrête dès que l'esprit a dégagé les schémas selon lesquels se constitue la dialectique. On voit bien ainsi comment se justifie notre référence au platonisme, en ce qui concerne les relations qui existent entre les théories mathématiques et les Idées qui les dominent.

Ces relations nous paraissent également comparables à celles que l'on pourrait établir entre les mathématiques et la physique. Un empirisme facile tend parfois, actuellement, à s'installer dans la philosophie de la physique, d'après lequel une dissociation profonde devrait être établie entre la constatation des faits expérimentaux et la théorie mathématique qui les relie les uns aux autres. Toute la critique des sciences contemporaines montre la faiblesse philosophique d'une pareille attitude (2) et l'impossibilité de considérer un résultat expérimental en dehors de l'armature mathématique où il prend son sens. Par contre la réflexion critique aboutit parfois, en sens inverse, à un dogmatisme idéaliste, du fait que les mathématiques pénétrant de plus en plus le domaine de la physique, la réalité y est devenue à ce point abstraite que le savant a l'impression de ne plus jamais se trouver qu'en face de son propre

(1) J. STENZEL, *op. cit.*, p. 119. En traduisant « Zahlenmässige Gliederung » par division nombrante, nous croyons ne trahir en rien la pensée de l'auteur.

(2) Ce néo-positivisme qui nous paraît ainsi insoutenable par excès d'empirisme, s'associe de façon inattendue à une conception rigoureusement « tautologique » et déductive des mathématiques, dans ce qu'on appelle le « physicalisme de l'Ecole de Vienne ».

esprit. Telle est l'idée qui semble se dégager de la phrase célèbre d'EDDINGTON : « Nous avons découvert l'étrange empreinte d'un pas sur le rivage de l'inconnu. Pour expliquer son origine, nous avons bâti théories sur théories, toutes plus ingénieuses et plus profondes les unes que les autres. Nous avons enfin réussi à reconstituer l'être qui laissa cette empreinte, et cet être, il se trouve que c'est nous-même (1). » Cet idéalisme de la physique mathématique n'exclut du reste pas pour EDDINGTON la notion de réalité, mais ce n'est plus alors la physique qui aura mission de la faire connaître, c'est un contact direct avec le surnaturel.

De toute façon, le néo-positivisme de l'école de Vienne, comme l'idéalisme des physiciens métaphysiciens anglais, séparent comme à la hache les mathématiques et la réalité, alors que la philosophie de la physique a essentiellement pour tâche le problème de leur union. Nous ne prétendons pas traiter ici ce problème, qui est tout différent de ceux que nous avons envisagés au cours des pages qui précèdent ; nous allons simplement montrer comment, dans une certaine mesure, et pour reprendre les expressions dont M. ROBIN s'est servi à propos de PLATON, le processus de liaison de la théorie et de l'expérience symbolise la liaison des Idées et des théories mathématiques.

De même que nous avons reconnu que la réalité mathématique n'était pas au niveau des êtres mathématiques, mais à celui des théories, le problème de la réalité physique n'intervient pas au niveau d'une expérience isolée, mais au niveau de ce qu'on pourrait appeler un système physique. La notion de système en physique implique que l'on considère globalement l'ensemble des phénomènes qui se passent au sein d'un certain processus, et que l'on opère une série de mesures relatives à des grandeurs intervenant dans ce processus. Il n'est du reste pas nécessaire que les mesures por-

(1) A. S. EDDINGTON, *Espace, temps, gravitation*, trad. franç., p. 247.

tent sur des grandeurs différentes, elles peuvent n'être relatives qu'à une même grandeur : il suffit pour qu'il y ait système, que l'on mesure plusieurs fois cette même grandeur. Il est peut-être possible d'admettre que la constatation d'une mesure isolée soit antérieure à toute élaboration mathématique, mais quelle que soit la phrase ou la relation par laquelle on coordonne deux mesures, l'expression obtenue se situe déjà au sein d'une mathématique. Parler de phénomènes simultanés, c'est adopter le langage de la relativité restreinte ; parler de grandeurs successivement mesurables, c'est parler le langage des opérateurs permutable en mécanique quantique ; mesurer des intervalles entre deux niveaux, c'est disposer les résultats obtenus suivant un tableau matriciel ; parler en mécanique classique de la constance d'une certaine grandeur avec le temps, c'est annuler une dérivée par rapport au temps ; parler de l'invariance d'une certaine grandeur par rapport à certaines variations que subissent d'autres grandeurs, c'est employer le langage de la théorie des groupes ; constater la périodicité d'un phénomène c'est se servir pour représenter ce phénomène des fonctions trigonométriques ; supposer que des mesures convergent vers une limite, c'est adopter les points de vue du calcul des probabilités. De même que le mouvement d'une théorie mathématique était en même temps schéma logique de relations entre des idées, la description de l'état d'un système à un moment donné ou de l'évolution de ce système avec le temps, revient à constater que les grandeurs du système sont ordonnables selon une loi de structure mathématique. La réalité physique n'est donc pas indifférente à cette mathématique qui la décrit ; les constatations expérimentales appellent une mathématique dont elles imitent déjà le dessin (1), parfois même avant

(1) Cf. G. JUVET, *La structure des nouvelles théories physiques*. Paris. Librairie Alcan, 1933, *passim*.

qu'une mathématique adéquate ait encore été développée pour elles.

Il résulte de ce qui précède que la structure de l'expérience n'est pas détachable de l'expérience elle-même, et qu'en entendant par expérience, l'expérience globale relative à un système, cette structure mathématique se confond avec le système des mesures expérimentales effectuées ou possibles. Ici encore la réalité réside dans la découverte d'une structure qui est organisatrice par rapport à une matière qu'elle anime de ses relations. La philosophie de la physique aboutirait donc elle aussi à la conclusion platonicienne à laquelle nous a conduit la philosophie mathématique telle que nous la concevons : La nature du réel, sa structure et les conditions de sa genèse ne sont connaissables qu'en remontant aux Idées dont la science incarne les liaisons.

Vu : le 28 janvier, 1937.

Le Doyen de la Faculté des Lettres
de l'Université de Paris,

H. DELACROIX.

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris,
S. CHARLÉTY.

INDEX (1)

- Achèvement (d'une théorie), 11, 87.
 ALEXANDER (J. W.), 54-59.
 ALEXANDROFF (P.) et HOPF (H.), 48-50, 58.
 ANTOINE (L.), 60-61.
 Approximation (d'une fonction), 37.
 BECKER (O.), 150.
 BERNAYS (P.), 11, 85-92.
 BIEBERBACH (L.), 21, 132-133, 138.
 BIRKHOFF (G. D.), 133.
 BLASCHKE (W.), 30.
 BOREL (E.), 22.
 BOUTROUX (P.), 140-145.
 BRIOT et BOUQUET, 131.
 BROGLIE (L. de), 112, 126.
 BROUWER (L. E. J.), 59.
 BRUNSCHVICG (L.), 9-10.
 CANTOR (G.), 84.
 Caractéristique d'EULER, 33, 134.
 CARATHEODORY (C.), 120.
 CARNAP (R.), 8, 87.
 CARTAN (E.), 22-25, 33-35, 45-48, 144.
 CAUCHY, 20-22, 25-27, 32.
 CAVAILLÈS (J.), 13, 83, 90.
 Champ d'individus (en logique), 88, 110.
 CHEVALLEY (Cl.), 67.
 Classes d'éléments (d'un groupe), 104.
 Classes d'idéaux, 69, 98.
 Clos (groupe), 34.
 Compact (espace), 121.
 Complète (surface), 32.
 Complexe (en topologie), 53.
 Corps algébrique, 64.
 Corps de classes, 69.
 COURANT (R.), 22. Voir également HURWITZ et COURANT.
 Courbure des surfaces, 32.
 Cycles (en topologie), 54.
 DESCARTES, 62-63.
 Dualité (théorèmes de), 56-57.
 EDDINGTON (A. S.), 153.
 EINSTEIN (A.), 9, 24, 44.
 Enlacement, 57.
 Equation aux dérivées partielles, 25.
 Equation de LAPLACE, 27.
 Equation différentielle, 25.
 Equation intégrale, 113.
 Espace conforme, 48.
 Espace de groupe, 101.
 Espace de HILBERT, 115.
 Espace de KLEIN, 22.
 Espace de RIEMANN, 23.
 Espace des fonctions continues, 36.
 Espace des fonctions de carré sommable, 118.
 EULER, 125.
 Famille normale de fonctions, 122.
 FERMAT, 126.
 FISCHER (E.), 118.
 Fonction algébrique, 74.

(1) En ce qui concerne les noms propres, les chiffres renvoient à toutes les pages où ils sont cités; en ce qui concerne les notions mathématiques, les chiffres renvoient seulement aux pages qui en contiennent la définition.

- Fonction analytique, 20.
 Fonction automorphe, 138.
 Fonction elliptique, 75.
 Fonction holomorphe, 26.
 Fonction modulaire, 137.
 Fonction potentielle, 96.
 Fonction propre, 112-113.
 Forme hermitienne, 115-116.
 FUCHS, 131.
 FURTWÄGLER (Ph.), 69.
- GALOIS, 64-66.
 GAUSS, 43.
 Genre d'une surface de RIEMANN, 95.
 GENTZEN (G.), 90-91, 147.
 GILSON (Et.), 62.
 GÖDEL (K.), 83, 91, 147.
 GOURSAT (E.), 22.
 Groupe clos, 34.
 Groupe de GALOIS, 64.
 Groupe de transformations, 34, 101.
 Groupe d'idéaux, 68.
 Groupe fondamental, 73.
 Groupe linéaire, 34.
- HADAMARD (J.), 26-27.
 HAMILTON, 126.
 HECKE (E.), 99.
 HELLINGER (E.), 113.
 HERBRAND (J.), 67, 83, 91-92, 109-111.
 HERMITE, 117.
 HILBERT (D.), 10-12, 67-69, 79, 84-92, 99-100, 111-120, 128.
 Homéomorphie, 49.
 HOPF (H.), 29-33, 134 ; voir également ALEXANDROFF et HOPF.
 HURWITZ (Ad.) et COURANT (R.), 22, 97.
 HUSSON (E.), 133.
- Idéal (en algèbre), 67.
 Intégrales abéliennes, 95.
- JANET (M.), 125.
 JORDAN (C.), 59-61.
 JULIA (G.), 130.
 JUVET (G.), 154.
- KANT, 41-43, 60, 107-108.
 KOEBE (P.), 79.
- KOWALEWSKA (M^{me}), 25-27, 131.
 KUMMER, 84.
- LEBESGUE (H.), 59, 117, 128-129.
 LEIBNIZ, 40-41, 50, 60, 125-126.
 LEFSCHETZ (S.), 53, 134.
 LEVI-CIVITA (T.), 45-47.
 LORENTZ, 24.
- MAUPERTUIS, 126.
 MAXWELL, 9.
 Métamathématique, 11.
 MEYERSON, (E.), 7.
 MINKOWSKI (H.), 24.
 MONTEL (P.), 120-123.
- NEUMANN (J. VON), 115, 119.
 Nombre de BETTI, 54.
 Nombre de classes d'idéaux, 99.
 Nombre d'intégrales, 96.
 Nombre de représentations, 104.
 Non-contradiction, 11, 87.
 Non-orientable (surface), 51.
- PLANCK (M.), 9.
 PLATON, 150.
 POINCARÉ (H.), 55-57, 60, 73, 79, 84, 130-133, 135, 146.
 Point fixe, 133.
 POIRIER (R.), 8.
 Pôle d'une fonction analytique, 95.
 PONTRJAGIN (L.), 59.
 Problème de DIRICHLET, 27-28, 127.
- Représentation conforme, 79.
 Représentation d'un groupe, 102.
 Rétrosection, 95.
 RIEMANN, 20-24, 35, 43-45, 75-80, 95.
 RIESZ (E.), 118.
 RINOW (W.), 31-33.
 ROBIN (L.), 150-151, 153.
 RUSSELL (B.), 7, 8, 10, 39, 83.
- SCHRÖDINGER (E.), 112, 119.
 SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.), 48, 50, 72.
 Série de FOURIER, 38.
 SEVERI (F.), 146.
 Simplement connexe (surface), 72.
 Simplexe (en topologie), 53.
 Singularité logarithmique, 95.

STENZEL (J.), 150-152.

STURM, 131.

Suite convergente, 31.

Suite fondamentale, 31.

Surface de recouvrement, 73.

Surface de RIEMANN, 75.

TAKAGI, 69.

THRELFALL (W.), 71-73 ; voir également SEIFERT et THRELFALL.

Transfini (axiome du), 85.

Uniformisation (problème de l'), 75.

Unilatère (surface), 51.

Valeur propre, 112-113.

VAN DER WAERDEN (B. L.), 64, 106.

Voisinage (axiomes du), 71.

WEIERSTRASS, 21-27, 37-38, 128, 136.

WEIL (A.), 115.

WEYL (H.), 22, 33-35, 47, 76-77, 96, 102, 104, 119.

WINTER (M.), 64, 141.

WITTGENSTEIN (L.), 8.

ZERMELO, 84.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION. — De la nature du réel en mathématiques.....	7

PREMIÈRE PARTIE

LES SCHÉMAS DE STRUCTURE

CHAPITRE I. — Le local et le global.....	19
CHAPITRE II. — Propriétés intrinsèques et propriétés induites...	40
CHAPITRE III. — La montée vers l'absolu.....	62

DEUXIÈME PARTIE

LES SCHÉMAS DE GENÈSE

CHAPITRE IV. — Essence et existence.....	83
CHAPITRE V. — Les mixtes.....	107
CHAPITRE VI. — Du caractère exceptionnel de l'existence.....	125
CONCLUSION..	141
